漫谈偏微分方程的学习与研究

李大潜

2006年7月

- 中国的微分方程研究

$$\bigcup$$

- 中国的偏微分方程研究

$$\bigcup$$

- 复旦的偏微分方程研究

$$\bigcup$$

$$\vdots$$

$$\bigcup$$

- 点滴体会

- 中国的微分方程研究

$$\bigcup$$

- 中国的偏微分方程研究

$$\bigcup$$

- 复旦的偏微分方程研究

$$\bigcup$$

$$\vdots$$

$$\bigcup$$

- 点滴体会

- 中国的微分方程研究

$$\bigcup$$

- 中国的偏微分方程研究

$$\bigcup$$

- 复旦的偏微分方程研究

$$\bigcup$$

$$\vdots$$

$$\bigcup$$

- 点滴体会

- 中国的微分方程研究

$$\bigcup$$

- 中国的偏微分方程研究

$$\bigcup$$

- 复旦的偏微分方程研究

$$\bigcup$$

$$\vdots$$

$$\bigcup$$

- 点滴体会

常微分方程

- 未知函数是一元函数

  包含未知函数及其某些导数的方程.

- $$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 解 $y = y(x)$ 的意义.

常微分方程

- 未知函数是一元函数

  包含未知函数及其某些导数的方程.

- $$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 解$y = y(x)$ 的意义.

常微分方程

- 未知函数是一元函数

  包含未知函数及其某些导数的方程.

- $$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 解$y = y(x)$ 的意义.

偏微分方程

- 未知函数是**多元**函数

  包含未知函数及其某些**偏**导数的方程.

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ (\text{Laplace方程})$$

- 解$u=u(x,y)$的意义.

偏微分方程

- 未知函数是**多元**函数

  包含未知函数及其某些**偏**导数的方程.

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ (\textbf{Laplace方程})$$

- 解$u = u(x, y)$的意义.

偏微分方程

- 未知函数是多元函数

  包含未知函数及其某些偏导数的方程.

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ (\text{Laplace方程})$$

- 解 $u=u(x,y)$ 的意义.

- 常微分方程

  一元微积分

- 偏微分方程

  多元微积分

- **常微分方程**

  一元微积分

- **偏微分方程**

  多元微积分

常微分方程

- 通解与特解.
- 存在唯一性定理:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ x = x_0 : \ y = y_0. \end{cases}$$

- 共性.

常微分方程

- 通解与特解.
- 存在唯一性定理:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ x = x_0 : \ y = y_0. \end{cases}$$

- 共性.

常微分方程

- 通解与特解.
- 存在唯一性定理:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ x = x_0: \ y = y_0. \end{cases}$$

- 共性.

偏微分方程

研究集中在少数特殊类型的偏微分方程:

椭圆型方程:

Laplace方程 $\triangle u = 0$

$$(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}),$$

波动方程:

$$u_{tt} = \triangle u,$$

抛物型方程:

热传导方程 $u_t = \triangle u,$

偏微分方程

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^3 = 0.$$
- 一般性结论极少
- 个性突出

偏微分方程

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^3 = 0.$
- 一般性结论极少
- 个性突出

偏微分方程

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^3 = 0.$$
- 一般性结论极少
- 个性突出

重视个性的原因

- 复杂性
- 不同的物理来源与背景$\Longrightarrow$ 不同类型的方程$\Longrightarrow$不同的特性$\Longrightarrow$不同的提法及解法
- 分门别类的研究才能展示丰富的内涵, 揭示问题的本质.

重视个性的原因

- 复杂性
- 不同的物理来源与背景 $\Longrightarrow$ 不同类型的方程 $\Longrightarrow$ 不同的特性 $\Longrightarrow$ 不同的提法及解法
- 分门别类的研究才能展示丰富的内涵，揭示问题的本质.

重视个性的原因

- 复杂性
- 不同的物理来源与背景 $\Longrightarrow$ 不同类型的方程 $\Longrightarrow$ 不同的特性 $\Longrightarrow$ 不同的提法及解法
- 分门别类的研究才能展示丰富的内涵，揭示问题的本质.

经典数学物理方程范围不断扩大:

Navier-Stokes 方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \triangle \mathbf{u} + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} + \mathrm{grad} p = \mathbf{F}, \\ div \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

理想流体力学方程组

$$
\begin{cases}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + +\mathrm{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{I}) = \rho \mathbf{F} \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2) + \mathrm{div}((\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 + p)\mathbf{u}) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}
\end{cases}
$$

其中

$$
p = f(\rho, T), \quad e = e(\rho, T).
$$

- **弹性动力学方程组**

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

- **Schrödinger方程**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi$$

- **KdV方程**

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

……

- **弹性动力学方程组**

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

- **Schrödinger方程**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi$$

- **KdV方程**

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

……

- **弹性动力学方程组**

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

- **Schrödinger方程**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi$$

- **KdV方程**

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

……

波动方程

- 声波, 电磁波(光波), 弹性波, ……
- 信息通讯(手机), 石油勘探与开发, 半导体器件设计, 电子显微镜, 激光制导, ……

波动方程

- 声波, 电磁波(光波), 弹性波, ...
- 信息通讯(手机), 石油勘探与开发, 半导体器件设计, 电子显微镜, 激光制导, ...

基本解

以单位脉冲为源所得的解

- 三维 $\triangle u = 0: \quad \dfrac{1}{4\pi r} \quad (r = r(x_0, x))$
- 一维 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}: \quad \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}$
- 三维 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u: \quad \dfrac{\delta(r-t)}{4\pi ar} \quad (r = r(x_0, x))$

……

基本解

以单位脉冲为源所得的解

- 三维 $\triangle u = 0: \quad \dfrac{1}{4\pi r} \quad (r = r(x_0, x))$
- 一维 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}: \quad \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}$
- 三维 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u: \quad \dfrac{\delta(r-t)}{4\pi a r} \quad (r = r(x_0, x))$

……

基本解

以单位脉冲为源所得的解

- 三维 $\triangle u = 0$: $\dfrac{1}{4\pi r}$ $\quad (r = r(x_0, x))$
- 一维 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}$
- 三维 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$: $\dfrac{\delta(r-t)}{4\pi a r}$ $\quad (r = r(x_0, x))$

……

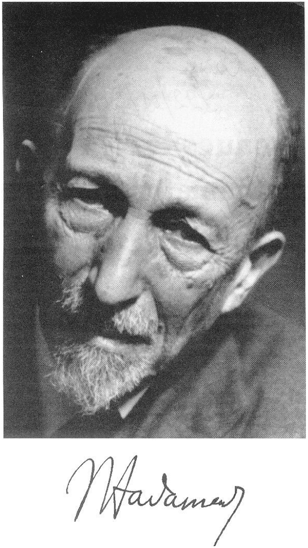
线性PDEs的解均可通过基本解的迭加而得到.

知道了基本解, 就掌握了这类方程解的一切必要的信息.

Jacques Hadamard (1865–1963)

吴新谋

技术上的困难



Jacques Hadamard
1865-1963

偏微分方程的解

传统的理解：局部化的方式。

能否转换为整体化的方式？

函数:

在区间$(0,1)$上的函数$y=f(x)$:

$$x\in(0,1)\longrightarrow y=f(x)\quad \text{(局部化的定义)}.$$

$\forall\varphi\in C_0^\infty(0,1)$ (试验函数),

$$(f,\varphi)=\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx\quad \text{(整体化的定义)}.$$

若f连续, 二定义等价.

等号两边并不完全相等:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

二个相互等价的定义并不全同:

$$f \in L^1(0,1), \qquad \text{几乎处处定义.}$$

δ函数:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0,$$

而

$$\int \delta(x)dx = 1.$$

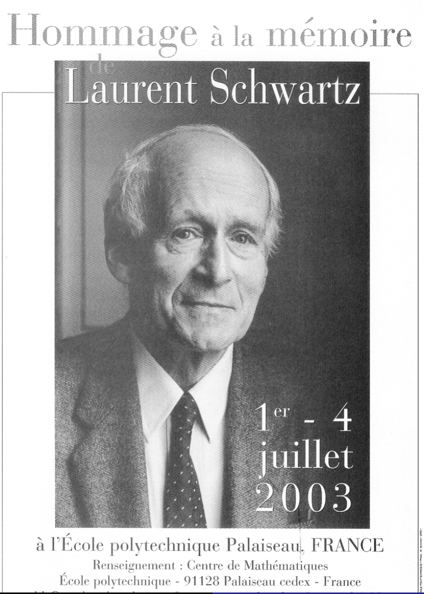
函数概念的飞跃:

J. Leray,

Sobolev

L. Schwartz,

分布论


Hommage à la mémoire
de
Laurent Schwartz
1er - 4 juillet 2003
à l'École polytechnique Palaiseau, FRANCE
Renseignement : Centre de Mathématiques
École polytechnique - 91128 Palaiseau cedex - France

$$\begin{cases} \triangle u = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

解 $u = u(x)$

局部化的理解.

整体化的理解:

$$\int_\Omega \triangledown u \cdot \triangledown \varphi dx + \int_\Omega f \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \text{适当光滑}, \ \varphi|_\Gamma = 0.$$

对$u \in C^2(\Omega) \bigcap C^0(\bar{\Omega})$, 二者等价.

但后者可拓展到$u \in H_0^1(\Omega) = \{u | u,\ Du \in L^2(\Omega),\ u|_\Gamma = 0)$.

泛函分析方法、Sobolev空间理论进入了偏微分方程.

利用分布论, 基本解可以很好的描述与处理.

Schwartz当年的预言.

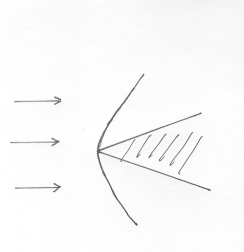
线性$\longrightarrow$ 非线性:

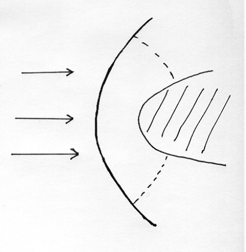
更强的个性, 更大的活动空间, 更多的机遇与挑战.

当代PDEs的前沿和主流.

一. 要重视物理模型的驱动

超音速绕流问题





理想流体力学方程组:

超音速流动$\Longrightarrow$双曲型

亚音速流动$\Longrightarrow$椭圆型

绕流物面上有边界条件.

激波面为自由边界.

音速面也是自由边界.

发展趋势:

方程 ⟶ 方程组

线性 ⟶ 非线性(拟线性)

给定边界 ⟶ 自由边界

局部 ⟶ 整体

低维 ⟶ 高维

定型 ⟶ 变型

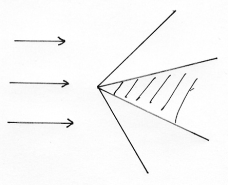
研究工作的切入点:

超音速尖头体的平面无旋定常等熵绕流

排除了高维、整体、变型, 但仍保留了拟线性、自由边界.

二变数拟线性双曲组的自由边界问题的局部解

楔形情况



曲边界情况

Cauchy问题:

A. Douglis (1952).
P. Hartman & A. Wintner (1952)
P. D. Lax (1954)
R. Courant & P. D. Lax (1955)
R. Courant (1961)

R. Courant & K. O. Friedrichs
"Supersonic flow and shock wave"
(1948).

- 利用速度图变换,
  特征线参数方法,

  实现将自由边界化为固定边界,
  消除中心波的多值性奇点.

  用简单的迭代法得到局部解(1960–1961)
- D. G. Schaeffer (1976): Nash-Moser迭代

- 利用速度图变换，
  特征线参数方法，

  实现将自由边界化为固定边界，
  消除中心波的多值性奇点.

  用简单的迭代法得到局部解(1960–1961)
- D. G. Schaeffer (1976): Nash-Moser迭代

LI Ta-tsien & YU Wen-ci:
"Boundary Value Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems" (1985)

局部解的完整理论:

边值问题, 自由边界问题.

激波, 接触间断, 中心波.

局部⟶整体:

Cauchy问题, 混合问题, 边值问题, 自由边界问题, ⋯⋯.

激波, 接触间断⋯⋯.

弱线性退化, 标准化坐标.

正问题$\longrightarrow$反问题

已知物面形状，求激波

已知激波，求物面形状

- 定型 ⟶ 变型 洪家兴

  低维 ⟶ 高维 陈恕行

  秦铁虎

  ……

- 李大潜, 秦铁虎, "物理学与偏微分方程"(上、下册)

- 定型 $\longrightarrow$ 变型 洪家兴

  低维 $\longrightarrow$ 高维 陈恕行
  秦铁虎

  ······

- 李大潜, 秦铁虎, "物理学与偏微分方程"(上、下册)

二. 要重视常微分方程的驱动

- 借鉴.
  本质上的差异.

- 零解的渐近稳定性,

  精确能控性

  精确能观性

  ······

二. 要重视常微分方程的驱动

- 借鉴.
  本质上的差异.

- 零解的渐近稳定性,

  精确能控性

  精确能观性

  ……

零解的渐近稳定性

- $$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad X = (x_1, \cdots, x_N)$$

  $f(0) = 0: \quad X = 0$ 是一个平衡态

  小扰动 $t = 0: \quad X = \varepsilon.$

- 若解 $X = X(t; \varepsilon)$在$t \geq 0$ 上整体存在, 且当$t \to +\infty$时, (指数)衰减为0, 则称为具有零解的渐近稳定性.

零解的渐近稳定性

- $$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad X = (x_1, \cdots, x_N)$$

  $$f(0) = 0: \quad X = 0 \text{ 是一个平衡态}$$

  $$\text{小扰动 } t = 0: \quad X = \varepsilon.$$

- 若解 $X = X(t; \varepsilon)$在$t \geq 0$ 上整体存在, 且当$t \to +\infty$时, (指数)衰减为0, 则称为具有零解的渐近稳定性.

定理: 若线性化方程组

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (A = \nabla f(0))$$

具有“耗散性”(A的一切特征值的实部均为负$\Longleftrightarrow$任何非平凡解在$t \to +\infty$时均指数衰减为零), 则原方程组具有零解的渐近稳定性

- 完全非线性波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = F(u, Du, D_x Du),$$

其中 $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$,

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

$$F(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^p), \quad \forall\ |\hat{\lambda}|\ 小,\ p \geq 2\ 整数.$$

$$u \equiv 0 - - - 平衡态.$$

-

$$t = 0: \quad u = \varepsilon\varphi(x), \quad u_t = \varepsilon\psi(x),$$

其中 $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ 为小参数.

完全非线性波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = F(u, Du, D_x Du),$$

其中 $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$,

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

$$F(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^p), \quad \forall\, |\hat{\lambda}| \text{ 小}, \ p \geq 2 \text{ 整数}.$$

$$u \equiv 0 - - - \text{平衡态}.$$

- $$t = 0: \quad u = \varepsilon\varphi(x), \quad u_t = \varepsilon\psi(x),$$

其中φ, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ 为小参数.

线性化方程

$$u_{tt} - \triangle u = 0$$

不含耗散项,但解仍可有一定衰减性:

$$|u(t,x)| \le C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \forall t \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

空间维数$n \ge 2$时, 一切解均衰减. 但不是指数衰减, 而且是多项式衰减; n愈大, 衰减愈快.

"荣誉犹如水中的圆圈,

(它)永不停息地扩大,

直至伸展到化为乌有."

— 莎士比亚《亨利四世》

对小解而言，p愈大，非线性项F的影响愈小.

当n及p足够大时, 可望有零解的渐近稳定性.

要找n及p=整数之间的一个**关系:**

满足这个关系, Cauchy问题的经典解在$t \geq 0$上整体存在, 即解的生命跨度$T(\varepsilon) = +\infty$, 且解具有与线性方程的解同样的衰减性, 即有零解的渐近稳定性;

反之,就不具零解的渐近稳定性, 经典解将在有限时间内破裂, 解的生命跨度$T(\varepsilon)$为有限数, 但当n及p愈大时, $T(\varepsilon)$也愈大. 要对$T(\varepsilon)$建立最佳的估计.

研究目标: 对一切整数$n \geq 0$及$p \geq 2$建立经典解生命跨度$T(\varepsilon)$的下界的精确估计.

从上世纪八十年代前后开始, F. John, S. Kainerman, D. Christodonou, L. Hörmander ······ 对一些特殊的情况用各种不同的方法分别得到有关的结果.

整体迭代法:

只须利用对线性波动方程的深入估计(各种范数下的衰减估计及能量估计)及压缩 映像原理,就可将问题解决到彻底的程度.

整体迭代法原则上可使用于其他类型的非线性发展方程, 但必须针对各自的个性, 对相应的线性方程进行具体细致的估计.

- 非线性热传导方程

$$u_t - \triangle u = F(u, D_x u, D_x^2 u)$$

其线性化方程

$$u_t - \triangle u = 0$$

的解具有较高的衰减性估计:

$$|u(t,x)| \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}.$$

- 零解的渐近稳定性有较好的结果.

整体迭代法原则上可使用于其他类型的非线性发展方程, 但必须针对各自的个性, 对相应的线性方程进行具体细致的估计.

- **非线性热传导方程**

$$u_t - \triangle u = F(u, D_x u, D_x^2 u)$$

其线性化方程

$$u_t - \triangle u = 0$$

的解具有较高的衰减性估计:

$$|u(t,x)| \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}.$$

- 零解的渐近稳定性有较好的结果.

三. 要重视科学计算的驱动

- 从源头上来减低计算复杂性
- 石油开发电法测井

在电极表面Γ上的边界条件(等值面边界条件):

$$\begin{cases} u|_\Gamma = C(\text{待定常数}), \\ \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = I(\text{已知常数}). \end{cases}$$

三. 要重视科学计算的驱动

- 从源头上来减低计算复杂性

- 石油开发电法测井

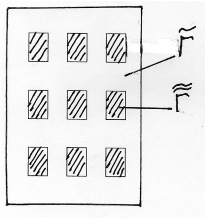
在电极表面Γ上的边界条件(等值面边界条件):

$$\begin{cases} u|_{\Gamma} = C(\text{待定常数}), \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = I(\text{已知常数}). \end{cases}$$

变曲率(分块)电极:

$$\Gamma = \tilde{\Gamma} \bigcup \tilde{\tilde{\Gamma}}, \quad \tilde{\tilde{\Gamma}} = \bigcup_i \tilde{\tilde{\Gamma}}_i$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\tilde{\Gamma}} = 0, \\ u|_{\tilde{\tilde{\Gamma}}} = C\ (\text{待定常数}), \\ \int_{\tilde{\tilde{\Gamma}}} \frac{\partial u}{\partial n} ds = I\ (\text{已知常数}). \end{cases}$$



满足适定性.

Γ上的边界条件急剧改变类型$\Longrightarrow$计算复杂性.

- 能否在Γ上用一个简单而统一的边界条件来近似代替上述复杂的边界条件?

  化简后的简单边界条件具有怎样的形式?

- 偏微分方程的均匀化$\Longrightarrow$ 边界条件的均匀化

  后续的研究: O. A. Oleinik及其学派,
  A. Friedman .....

满足适定性.

Γ上的边界条件急剧改变类型⟹计算复杂性.

- 能否在Γ上用一个简单而统一的边界条件来近似代替上述复杂的边界条件?

  化简后的简单边界条件具有怎样的形式?

- 偏微分方程的均匀化⟹ 边界条件的均匀化

  后续的研究: O. A. Oleinik及其学派,
  A. Friedman .....

- 基本的思路: 既然出现了计算的复杂性, 干脆考虑最坏的极端情况, 即设电极愈分愈细、愈分愈多(但总面积不变或保持同一量级)而考虑其极限.

- 均匀化边界条件

$$\begin{cases} u|_\Gamma = C\ (\text{待定常数}), \\ \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = I\ (\text{已知常数}). \end{cases}$$

分块电极$\longrightarrow$整块电极.

- 基本的思路: 既然出现了计算的复杂性, 干脆考虑最坏的极端情况, 即设电极愈分愈细、愈分愈多(但总面积不变或保持同一量级)而考虑其极限.

- 均匀化边界条件

$$\begin{cases} u|_\Gamma = C\ (\text{待定常数}), \\ \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = I\ (\text{已知常数}). \end{cases}$$

分块电极$\longrightarrow$整块电极.

谢 谢!