华罗庚与中国的多复变

周向宇

2006年7月1日

复变函数：柯西（Cauchy）积分公式（柯西核），施瓦茨（Schwarz）引理，单位圆上调和函数的泊松（Poisson）核。

与几何、拓扑等其它方向的紧密联系：

- 开映照定理，共形性
- Schwarz 引理：单位圆盘上 $f^*ds^2 \le ds^2$，度量拉回，这里 ds^2 是 Poincaré 度量
- 共轭调和函数的存在性
- 同伦，同调

钟家庆在为《中国大百科全书》数学卷撰写多复变函数论条目时，称多复变函数论是“数学中研究多个复变量的全纯函数的性质和结构的分支学科”。

用范畴（category）的语言来说多复分析（多复变）：是研究复解析范畴的学问。这里，范畴的对象（objects）是复流形（乃至复空间），态射（morphisms）是复流形（乃至复空间）间的复解析映照。参看 Remmert 的综述文章：“From Riemann Surfaces to Complex Spaces”（从黎曼面到复空间）。

衍生物：CR 结构，亚纯映照，多次调和函数，currents（正定并且闭的，positive closed）等等。

普遍认为，现代数学的特点：高维，交叉。而多复变正是反映这些特点的方向之一。

多复分析的产生背景

源自于该学科若干有自身特点的本质发现：Poincaré、Hartogs 的发现，从而多复变作为一个独立研究方向获得发展。

19世纪：复分析的世纪

19世纪末：多复分析只是单复分析的简单推广

20世纪初：

（1）由经典的 Riemann 映照定理：

$\mathbb{C}$ 中单连通域（非 $\mathbb{C}$）$\cong \Delta$。特别，任意有界凸域均双全纯等价。

Poincaré 发现，当 $n \geq 2$ 时，

$$\text{单位球 } \{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}$$
$$\text{多圆盘 } \{|z_1| < 1, \cdots, |z_n| < 1\}$$

不双全纯等价。

（2）Hartogs 现象：

对于 $D \subset \mathbb{C}^1$，找到全纯函数 f，使得 f 不能解析定义在更大的域上。

例如，$\sum z^{n!}$ 的自然定义（或存在）域是单位圆盘 Δ。一般域的情形请参看 Rudin 的书《Real and Complex Analysis》。

当 $n \geq 2$，穿孔单位球 $B_n/\{0\}$ 上的全纯函数一定在单位球上全纯。

导致多复变中基本概念

全纯域（domain of holomorphy）的定义：

$D \subset \mathbb{C}^n$ 不发生 Hartogs 现象，即存在一个全纯函数 f，使得 D 是 f 的自然定义（或存在）域（D 的边界称为自然边界）。

单复变：每一开集都是全纯域

多复变：并非每一开集都如此，例如：$B_n/\{0\}$ 不是全纯域，因为全纯函数的零点不孤立。

陆启铿《多复变数函数引论》：

“什么域是正则域（全纯域），什么域不是正则域（全纯域），这是多复变数解析函数论的根本问题之一。”

Nishino《Function Theory in Several Complex Variables》（多复变函数论）：

“多复变函数论的首要问题是研究哪些域是全纯域，并且决定我们能够在全纯域中构造哪些对象。”

有界对称域，有界齐性域

均是全纯域，凸域（或全纯等价于凸域），拓扑平凡。

E. Cartan 给出有界对称域的分类，不可约有界对称域：4类典型域，

$$\mathbb{R}_{\mathrm{I}} = \{Z \in [m \times n] :\ I - Z\overline{Z}' > 0\}$$
$$\mathbb{R}_{\mathrm{II}} = \{Z \in [p \times p] :\ I - Z\overline{Z}' > 0,\ Z = Z'\}$$
$$\mathbb{R}_{\mathrm{III}} = \{Z \in [q \times q] :\ I - Z\overline{Z}' > 0,\ Z = -Z'\}$$
$$\mathbb{R}_{\mathrm{IV}} = \{Z \in \mathbb{C}^N :\ I + |ZZ'|^2 - 2Z\overline{Z}' > 0,\ 1 - |ZZ'|^2 > 0\}$$

2类例外域（16维，27维）。取名来自典型群。

非紧型埃尔米特对称空间与紧型埃尔米特对称空间（复 Grassmannian, . . . ）：刚性，稳定，Fano 流形，Kähler-Einstein 流形，. . .

紧型与非紧型埃尔米特对称空间的对偶，Borel 嵌入定理，Harish-Chandra 嵌入定理。

E. Cartan 的问题：有界齐性域是否对称域?

Pyatetski-Shapiro （Wolf 奖获得者）1959年给出反例；
对有界齐性域的分类作出重要贡献（与 Gindikin, Vinberg 合作）

有界齐性域全纯等价于 Siegel 域

有界齐性域：
Bergman 度量是 Kähler-Einstein
有界齐性域对偶旗流形（flag manifold）
特征流形（Shilov 边界）：边界的一部分，由极大模原理定义。

多复变在其它领域有着重要的作用。

H. Grauert 解决复流形上的 Levi 问题，并用多次调和函数给出 Stein 流形的刻划。这可以推出实解析流形实解析嵌入到 $\mathbb{R}^N$（紧的情形属 Morrey）。

量子场论中色散关系（第一个实际应用，edge of the wedge, N.N. Bogoliubov, V. Vladimirov）

Y.T. Siu（肖荫堂），Demailly 等用多复变技巧解决代数几何、复几何重要问题。

华罗庚：中国多复变的开创者

华罗庚教授在工作

华先生早期多复变论文（1944-1949）：

L.K. Hua [1] On the theory of automorphic functions of a matrix variable I-Geometrical basis, American Journal of Mathematics, 66(1944),470-488.

L.K. Hua [2] On theory of automorphic function of a matrix variable II-The classification of hypercircles under the symplectic group. Amer. J. Math., 66 (1944),531-563.

L.K. Hua [3] On theory of Fuchsian functions of several complex variables, Ann. of Math., 47(1946), 167-191.

L.K. Hua [4] On the extended space of several complex variables (I): The space of complex sphere, Quaterly J. Math., 17(1946), 214-222.

华罗庚教授将各类典型域的研究归结为矩阵几何学的研究，全纯自同构群（运动群），引入不变度量（华氏度量，可定义在有界齐性域上）并计算其测地线，截面曲率等，余紧离散子群基本域的存在性，Poincaré theta 级数的收敛性。

对典型域，华氏度量与 Bergman 度量只差一常数。

辛群、辛几何等的译名由华先生给出。

C.L. Siegel 论文：Symplectic geometry. Amer.J.Math.,vol. 65, 1943

应用：多复变 Abel 函数、二次型理论的研究

Siegel 上半平面=第二类典型域的无界形式

类比：上半平面=单位圆盘的无界形式

椭圆曲线的模空间（Moduli space）= 上半平面/离散子群

Abelian 簇的模空间（Moduli space）= Siegel 上半平面/离散子群

华先生回国后多复变工作（1950-1958）：开创了多复变在新中国的研究工作。
早期学生：陆启铿，龚升，钟同德（进修），稍后，许以超，陆汝钤，…陆汝钤说过：多复变很难。再后，北大多复变专门化。
若干论文：

1. On the theory of functions of several complex variables. I. A complete orthonormal system in the hyperbolic space of rectangular matrices. II. A complete orthonormal system in the hyperbolic space of hyperspheres. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S) 93 (1953),775-777, 983-984 (in Russian)
2. On the theory of functions of several complex variables, A complete orthonormal system in the hyperbolic space of symmetric and anti-symmetric matrices. Dokl Akad. Nauk SSSR, 101 (1955), 29-30.

3. Theory of functions of several complex variables, I. A complete orthonormal system in the hyperbolic space of matrices. Acta Sci. Sinica 4(1953),288-323. (in Chinese)

4. 多个复变数函数论II，超球双曲空间中的一完整正交函数系，数学学报，5（1955），1-25; III，对称方阵及斜对称方阵双曲空间的一完整正交函数系，数学学报，5（1955），205-242

5. 常曲率的多复变数域，数学学报，4（1954），317-322。

6. On the estimation of the unitary curvature of the space of several complex variables. Sci. Sinica 4 (1955), 1-26; 即数学学报，4（1954），143-169。

用群表示论方法构造出4 类典型域的完备规范正交基（模平方可积全纯函数空间– Bergman 空间），典型域的截面曲率是非正的。

著作：《多复变数函数论中的典型域的调和分析》，1958，科学出版社

部分发表在《数学学报》（1950-1955）（一些初步报告发表在“苏联科学院报告”上）；还包括了一些新结果。

用两种方法构造出4 类典型域的各类核：Bergman 核（是 Bergman 度量（Poincaré 度量的高维推广）的势），Cauchy-Szegö 核，Poisson 核。

1. 从完备正交基出发；
2. 对有界齐性域，Bergman 核可由某种全纯映照的 Jacobian 给出。

方法特点：构造性，显式，直接，具体；精密的分析和矩阵技巧；奇妙的代数恒等式；矩阵变元积分的巧妙计算；矩阵分解（对应于李群结构的分解定理如 Cartan 分解定理 I，Cartan 分解定理 II，Iwasawa 分解定理，华先生自己在矩阵几何研究中发现的一些分解定理）

A. Weil： “Hua plays with matrices just as if he were playing with integers” 。

与陆启铿系统地建立了典型域的调和函数理论，并解决了对应的拉普拉斯-贝尔特拉米方程的狄利克雷问题；建立了典型域上的扩充空间理论。

以华罗庚名字命名的“华算子”，“华方程”。

华还发现，对第一类型的典型域，泊松积分不仅满足 Laplace-Beltrami 方程，还满足一系列微分方程：

$$(I_m - Z\overline{Z}')\overline{\partial}_Z(I_n - \overline{Z}'Z)\partial'_Z$$

一个长期未解决的问题：用微分方程刻画 X 上的一类函数，即 Shilov 边界上超函数（hyperfunction）的泊松积分。

Johnson-Koyanyi，Berline-Vergne，Lassalle，. . . ，（Ann. of Math., Invent. Math., JFA, . . . 一系列文章）

华：由多复变研究引起，混合型偏微分方程的一些问题研究（《从单位圆谈起》、《二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组》）。

Siegel 三卷本《Topics in complex function theory》引用华、陆论文十余篇。

W.Rudin 在他的专著中指出：“直到华罗庚的工作问世之前，人们连单位球上的柯西核都写不出来。”

这项工作在李群表示论，自守函数论，调和分析、复几何、微分方程、齐性空间理论等研究中有着广泛深入的影响。

苏联数学家 I.I.Pyateskij-Shapiro 关于多复变函数论的突出工作曾受到华罗庚工作的影响。

华罗庚的专著英文版编者指出：“华罗庚的工作不仅对函数论本身非常重要，同时对于李群表示论，齐性空间理论与多复变自守函数论亦很重要。”

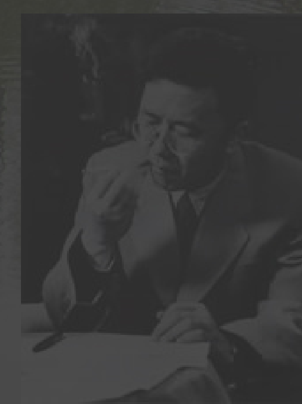
1956年获得第一届国家自然科学奖一等奖。

1958年，科学出版社出版了华先生的《多复变函数论中典型域上的调和分析》一书。此书的初稿完成于1954年，是申请一等奖的依据。

陆启铿：“此书一出版就引起了国际上的高度重视。首先是苏联科学院 Steklov 数学研究所于同年来函要求将此书翻译成俄文出版。但由于苏联人同时精通中文及数学的不多，因此希望中国科学院先把它译成英文，再由苏联人把它译成俄文。这个任务落到我头上。由我先把此书译成英文，请人把英文打好，交华先生订正后寄去苏联科学院,再由他们译成俄文出版。英文版是1963年从俄文版再翻译成英文，由美国数学会出版的，英文翻译者是 A. Koranyi。”

60年代初期在中山大学讲学的一份讲义就是用矩阵的方法来处理狭义相对论的，还曾用矩阵的方法处理 Dirac 算子，准备对 Dirac 算子的热核进行研究。

华老的学生，中国科学院院士陆启铿教授



陆启铿：50年代在国际上较早地得到了多复变函数的 Schwarz 引理，对有界齐性域上的 Bergman 度量 $f^*ds^2 \leq kds^2$；引入了典型域上一些由曲率确定的全系解析不变量，激发了 A.Koyanyi 给出例外有界对称域上的类似解析不变量（$k =$ D 的秩，对不可约有界对称域 D）；与陈志华，郑绍远在1979年合作证明一条施瓦茨引理，是丘成桐得到的施瓦茨引理的一种变形。

陆与许以超给出华的一个猜想的反例，这个猜想是说，有界齐性域的曲率非正。

随后，D’Atri, Dotti Miatello, 1983 证明：一个有界齐性域是对称的，当且仅当所有截面曲率是非正的。

构造一类齐性复流形，在引入合适的超球（hyperballs）以后，他们就成为齐性域，大多不是对称的，但全纯等价于 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界域。

对有界全纯映照，发现可用 Bergman 度量张量来控制映照的 Jacobian。作为推论，Caratheodory 度量一定不超过 Bergman 度量，这是多复变中的基本结果，比美国学者同样的工作要早很多。

与钟同德合作，研究 Bochner-Martinelli 积分的边值问题，得到 Plemelj 公式。

1966年对勒雷公式作出实质性发展，并创造性地应用于积分表示，他发现：华关于典型域的柯西公式可以从 Leray 的 Cauchy-Fantappiè 公式得到。

1966年提出了“陆启铿定理”：具常曲率的完备 Bergman 度量的有界域解析等价于单位超球的论述，并提出了 Bergman 核有无零点的问题，在国际上被称为“陆启铿猜想”，该猜想成立的区域被称为“陆启铿域”（有界齐性域是“陆启铿域”），“陆启铿猜想”已载入多复变的教科书，至今一直有人研究。

70年代指出物理上规范场与数学上的主纤维丛的联络的关系，证明杨振宁的规范场的积分定义等价于沿一曲线的平行移动。

80年代以来，提出一个系统的方法，可具体地构造非紧对称空间的热核。

合作写了一篇题为“典型时空中的运动效应和宇观红移现象”的文章，发表于1974年《物理学报》23卷4期225-237页。此文是用典型域的模型研究除了 Minkowski 空间之外，还有什么时空使得狭义相对论的原理依然成立，发现了还有两个典型时空存在惯性系，使得相对性原理与光速不变原理成立，并且用其中一个典率为负的典型时空来解释宇宙红移现象，与观测的数据比较，得到较好的符合。

AdS/CFT 对应猜想：AdS 全称是“Anti de-Sitter 空间”，就是陆先生他们提出的典型时空的一种。

钟家庆：

1. 与莫毅明合作，推广丘成桐 – 肖荫堂证明 Frankel 猜想的工作，证明了：一个具有非负全纯双截曲率和正 Ricci 曲率的紧致凯勒 – 爱因斯坦流形必定等距于一个紧致埃尔米特对称空间。随后，莫毅明解决了广义 Frankel 猜想。

2. 与莫毅明合作，证明如下定理：
给定具有有限体积完备凯勒度量，负 Ricci 曲率度量以及有界截曲率，并且拓扑型有限的复流形，那么这个流形全纯同构于一个射影代数簇的 Zariski 开集。
比如，局部对称空间的紧化（Baily-Borel 和 Siu-Yau）。

西群上的调和分析（华：西群上的 Fourier 级数可 Abel 求和），导致整套的典型群及紧李群上的调和分析（龚升，钟家庆，…）

多复变奇异积分及积分表示，函数空间（陆启铿，龚升，钟同德，史济怀，…）

多复变凸映照，星形映照（龚升，王世坤，余其煌，刘太顺，…）

Laplace-Beltrami 算子的特征值估计（钟家庆，杨洪苍，…）

相关工作：陈志华，殷慰萍，张锦豪，谭小江，…

有界齐性域（陆启铿，许以超，...）许以超：引入 N-Siegel 域（更具体的 Siegel 域），证明任何有界齐性域双全纯等价于这种域。

计算了全纯自同构群，Bergman 核，Cauchy-Szegö 核，形式泊松核。

陆汝钤给出满足 $\Delta_z P(z,u) \neq 0$ 的齐性 Siegel 域的第一个例子。

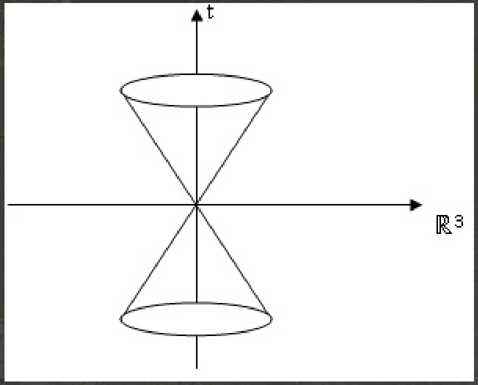
许以超证明有界齐性域 D 上形式泊松核 = 泊松核，当且仅当 D 是对称的。

作者的工作：狭义相对论中时空的数学模型：

$M^4 = (\mathbb{R}^4 <,>)$，点 (t, x, y, z)，度规 $t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

未来光锥（ future light cone ）

$$\omega := \{(t, x, y, z) | t > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\}$$



tube domain 管状域（即第一类 Siegel 域） S. Bochner：

$$T_\omega \text{ 全纯域} \Leftrightarrow \ \omega \text{ 凸}$$

1–point 未来光管（第 I，IV 类典型域的无界形式，也等价于 Siegel 上半平面）

$T_\omega = \mathbb{R}^4 + i\omega \subset \mathbb{C}^4$

n–point 未来光管

$D := T_\omega \times \cdots \times T_\omega \subset \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \cdots \times \mathbb{C}^4$

$O(1,3) \qquad L_+^\uparrow := SO_+(1,3)$

Lorentz 变换：Lorentz 群（一类典型群）

$$L(\mathbb{C}) = O(1,3,\mathbb{C})$$

$$L_+(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^4 \times \cdots \times \mathbb{C}^4) \text{ 对角作用}$$

$$(A, z_1, \cdots, z_n) \rightarrow (Az_1, \cdots, Az_n)$$

D 关于 $L_+^{\uparrow}$ 不变

$D' = L_+(\mathbb{C}) \cdot D$ 区域的 D' 比 D 要大。
$= \{Az | z \in L_+(\mathbb{C}), z \in D\}$
$D' \subset (\mathbb{C}^4)^n$ 扩充未来光管（extended future tube）

一个非常自然漂亮的问题是，扩充未来光管猜想：

扩充未来光管是全纯域。

周证明了该猜想。

产生新的问题，与多复变中核心内容如 Cartan-Serre 的 Stein 流形理论（定理 A、B），L^2 估计及其现代发展（Hörmander，Kohn，Andreotti-Vesentini，...）及其他经典问题有深入联系。

“从华罗庚获奖的书中知道，4维 Siegel 上半平面的 Bergman 核函数可以写成 1/det ImZ 的若干次方的形式，是一个多次调和函数。他的学生的学生周向宇在解决“扩充未来光锥管域猜想”的证明中，重要的一步就是要构造一个在扩充未来光锥管域的多次调和函数，要从上述函数出发。这一着如果不是华学派的弟子是难以想到的。”

证明基于一系列观察，这一着是其中之一。用到华学派的矩阵技巧。该 Bergman 函数有类似 Lorentz 群作用的不变性。

在最近二十年中，我国多复变工作者取得的成绩有：

获何梁何利奖一项（陆启铿），

华罗庚数学奖两项（陆启铿，龚升），

陈省身数学奖两项（钟家庆，周向宇），

国家自然科学奖二等奖两项（钟家庆，周向宇），

国际数学家大会45分钟应邀报告人一位（周向宇）等等。

华先生说：

“如果自己的脑子里没有问题了，就不是数学家了！”

组织讨论班，开展集体攻关也是培养人才的好形式．既可以集思广益，又可以活跃学术空气．当时，他经常参加讨论班，经常不断地提出问题和疑点，把大家的思想推向一个更为积极、活跃的境界。

华先生与学生：

华罗庚在选拔人材方面不拘一格，选择学生时从不以貌取人，对学生们严格要求，

故事：他在给广州中山大学作学术报告时，在听讲的学生中，有一位拄着双拐的残疾青年名叫陆启铿，他听了华罗庚的报告后，便产生了一个大胆的念头：毕业后能分配到北京，在华罗庚的指导下搞研究。这个想法在旁人看来简直有点异想天开，当时华罗庚是万人仰慕的大数学家，不知有多少四肢健全的人以作华罗庚的学生为荣，他怎会收下像陆启铿这样的残疾青年呢？陆启铿反复思考之后，终于鼓足勇气给华罗庚写了一封信。他很快收到回信。在华罗庚的悉心指导下，陆启铿后来成为颇有造诣的数学家。

故事：早期的中国科学院数学研究所名为研究机构，而实际上更像个数学系，年轻的研究人员往往像学生一样听课。华罗庚对学生们严格要求，他每天黎明即起，然后去敲学生们宿舍的门，接着是和学生们讨论问题或授课，一干就是一天。有时睡到半夜，他忽然爬起来，穿上衣服又去逐个敲学生们的房门：“别睡了，别睡了，白天的题目还得再讲一讲！……”就这样，华罗庚忘我地工作，他对学生们说：“如果自己的脑子里没有问题了，就不是数学家了！”在老师的严格教导下，这些20多岁的小伙子，兢兢业业，勤奋不息，即使假日也不休息。

故事："他最初叫我报告 R.Fueter 写的模函数论，我都是先战战兢兢小心准备，每一个细节都验算过，以防他问起来好答复。纵然如此，他还会问一些意想不到的问题。这样我经常吊在黑板上，十分狼狈。开始时我很不好受，面子上很难过，但后来我觉得从这种训练中我受益不浅，知道什么是严谨与严密，以及把一个复杂的定理证明，分析为各个要素及找出关键的所在。就是在这本书中，我发现其中有些页有黄土斑斑的污点。我问华老为何此书如此之脏，他说这是在西南联大躲空袭警报时，在防空洞看书，一个炸弹下来，把防空洞炸塌，连人带书埋在土里，是闵嗣鹤先生把他从土里挖出来的。这使我肃然起敬，因为在飞机头上轰炸时还能专心读书，这种雷打不动的求知精神，令我终身难忘。"

故事：“华老不仅指导了大量的学生，今天这些学生大部分已在不同的领域中，起着带头人的骨干作用。而且在他直接主持数学所的业务期间，还经常请著名的学者来作报告，介绍新的结果、新的研究领域。并不局限于他自已所从事的几个领域。所以数学研究所的学术气氛相当活跃，绝大多数的研究人员都是日以继夜全力去探索、去工作，晚上办公室的灯火是通明的。在这样的学术气氛熏陶之下，我的学问才有所长进。”

来到中科院数学所：1985年抱着对数学研究的爱好及对华老的敬仰，以名列前茅的成绩考入中科院数学所，同学中有张伟平、刘克峰等，可惜华老刚去世，未能如愿见到华老。

读华先生的小册子：中学时，华先生的科普小册子（《从杨辉三角谈起》，《从祖冲之的圆周率谈起》，《从孙子的“神机妙算”谈起》，《数学归纳法》，《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》）

研究生院学习：周末讨论班：与几位同学（包括张伟平）一起周六晚上去教室报告、讨论；当时出国风挺烈，没有考托福，感到要学的数学很多。

做陆先生的学生：起先（与刘克峰）跟钟家庆学。

要求读华先生的名著：《多复变数函数论中的典型域的调和分析》。

三人讨论班（包括刘克峰）报告陆先生的《典型流形与典型域》。

Hua, Loo Keng：On the mathematical theory of globally optimal planned economic systems. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 81 (1984), no. 20, Phys. Sci., 6549–6553.

华罗庚教授是在1982年被选为美国全国科学院外籍院士的。他是美国全国科学院百年多历史上获得这个荣誉称号的第一位中国科学家，全票当选。

参考文献：

陆启铿：华罗庚敏锐的直觉惊人的技巧。中科院创新案例汇编。

陆启铿：在中科院数学所首届“华罗庚数学讲座”的演讲，1999

陆启铿：The Theory of Functions of Several Complex Variables in China from 1949-1989.

王元：《华罗庚》

王元，杨德庄：《华罗庚的数学生涯》

《华罗庚科普著作选集》

Yang C.C., Gong Sheng (Editors): Several Complex Variables in China.

谢谢！