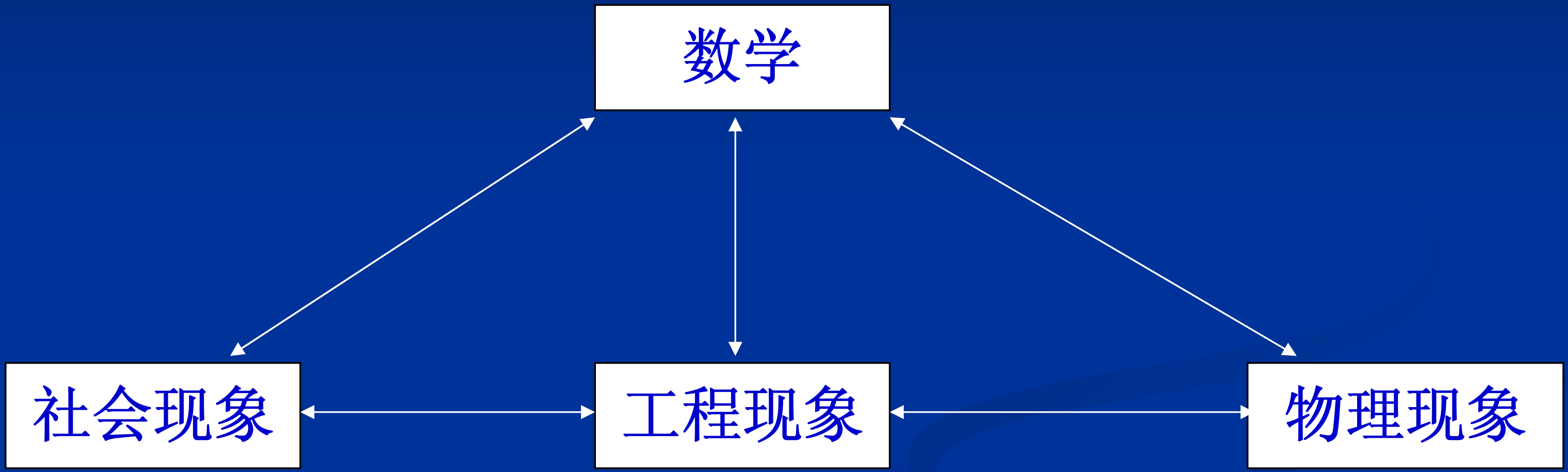
中国数学的全景展望

丘成桐教授

浙江大学
哈佛大学

2006年6月30日


数学
社会现象
工程现象
物理现象

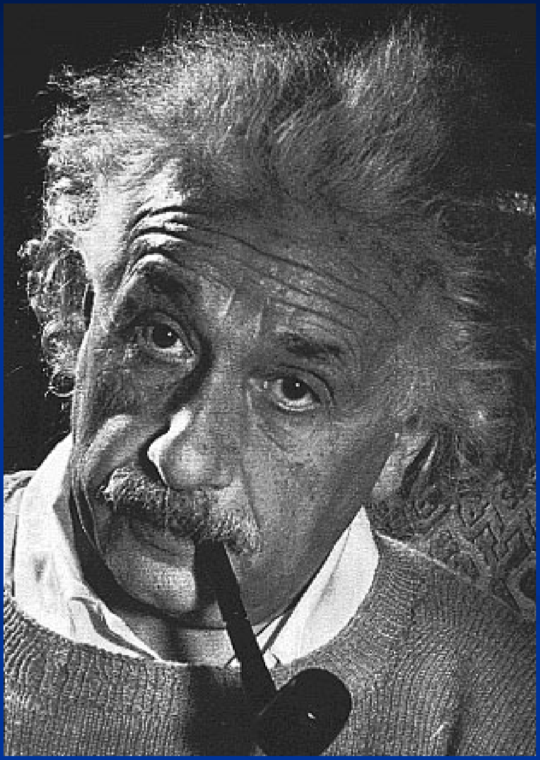
- 数学和工程科学是社会科学的基础
- 理论物理是工程科学的基础
- 数学是理论物理的基础

物理学上的统一场论

人类科技愈进步愈能发现新现象
种种繁现象使人极度迷惘
(例如：湍流问题、黑洞问题)
但是主宰所有现象变化的只是几个少数的基本定律。
Standard model (标准模型)
统一了三个基本场：电磁场、弱力、强力
但是重力场和这三个场还未统一

重力场由广义相对论描述，是侠义相对论和牛顿力学的统一理论而形成的。

黎曼几何学从此进入到物理学的核心部分：时空的变化



数学上的统一？

弦理论希望统一重力场和其它所有场。

在廿一世纪，基本数学会遇到同样的挑战：

基本数学会朝统一的方向发展，只有在各门分支大统一后，这些分支才会放出灿烂的火花，而我们才会对这些学问得到本质性的了解。

数学的大统一将会比物理的大统一来得基本，也将由统一场论孕育而出。

弦论的发展已经成功地将

微分几何

代数几何

群表示理论

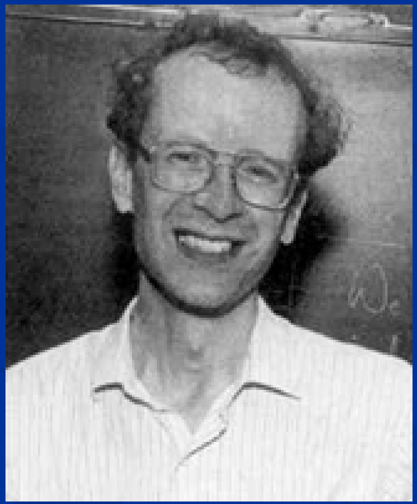
数论

拓扑学

相当重要的部分统一起来。数学已经由此得到丰富的果实。

大自然提供了极为重要的数学模型，物理学和工程学上很多模型都是从物理直觉或从试验观察出来的。但是数学家却可以从自己的想象，在观察的基础上创造新的架构。

成功的数学架构往往是几代数学家共同努力得出的成果，也往往是数学中几个不同分支合并出来的火花。例如，Andrew Wiles的工作就是由椭圆曲线理论和Automorphic form理论，表示论和交换代数理论的合并得出来的结果。



数学的对象和工具

几何、数字（尤其是整数）和函数的结构可以说是数学里最直观的对象，因此在数学的大统一过程中会起着最要紧的作用。数学分析和代数则是研究这几门学问的主要工具，也是基本数学和应用数学的主要桥梁。

数学的发展

数学的发展由一个变量到多个变量，由一维到高维空间，由可换群到非交换群，由低次方程到高次方程，由线性方程到非线性方程，都是不可逆转的趋势。凡此种种，都随自然而生，始得华茂。有些数学家逆时发展一些数学结构，难以得到丰盛的果实。

中国古代哲学家就主张一切事物的发展都须顺应自然。

- 老子："人法地，地法天，天法道，道法自然"

- 孙子兵法："故兵无常势，水无常形。能因敌变化而取胜者，谓之神。" "激水之疾，至于漂石者，势也。"

数论

找寻数学方程的整数解是算术中一个重要的问题。对一次方程组，中国数学家对同余的方法有很重要的贡献，因此数学史上有著名的中国余数定理。

在现代计算器和密码理论亦用到这个同余的方法。

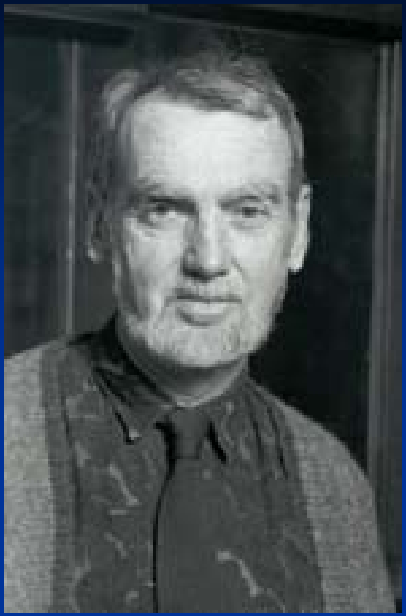
数论上一个极为重要的猜想叫做Swinnerton－Dyer－Birch猜想，可以用来解决一些难题。例如一个数学上最古老的问题就可由它来解决:

找出所有正整数n，使得它是一个有理直角三角形（三个边的长度都是有理数）的面积。例如6=4×3/2，而{3, 4, 5}是直角三角形的边的长度。

这个问题由Tunnel在八十年代解决，但他需要假定Swinnerton-Dyer-Birch猜想的真实性。

事实上，二十世纪的数论学家透过代数几何的方法已经将整数方程与几何结合，群表示理论则提供数论和几何学结合最重要的工具。在数论里的Galois群和在几何学里的规范群，都与群表示有关。五十年来，我们看到数论和几何的研究从可交换群发展到非交换群的表示理论。产生了Langlands理论和Yang－Mills理论。他们都在现代数学上占有重要的位置。

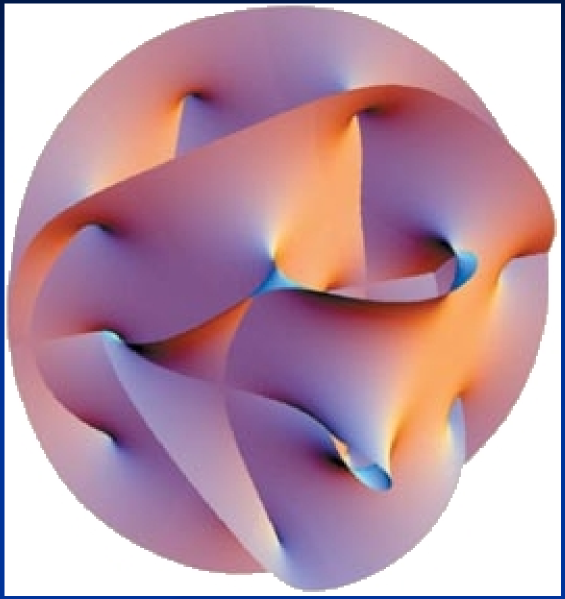
在Langlands理论的想法中，一般算术流形上的所谓L函数可由所谓Shimura流形的L函数生成。在椭圆曲线的特殊情形下推出所谓Shimura－Tanniyama－Weil猜测。而这个猜测由Andrew Wiles十年前证明，他透过Frey，Serre和Ribet的贡献将困扰了数学界近三百多年的Fermat猜测完全解决。就是说以下方程:



$$x^n + y^n = z^n$$

在n≧3时的整数解必定在{0,-1,1}的集合中。

在二十一世纪我们可以预见数论函数的理论会有长足的发展，也希望他们的理论会跟几何、物理学逐渐凝结在一起。弦理论上的一个重要的代数流形叫做Calabi－Yau空间，它可以说是椭圆曲线的自然推展。我们已经逐渐见到弦学上的对偶理论在深刻地影响着Calabi-Yau空间的了解，所以也可以想象他们会在算术上有特殊的贡献。



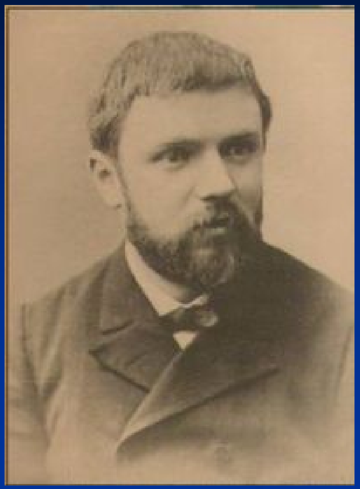
几何和拓朴

在十九世纪中叶，复变函数开始奠基。因此刺激了各门数学学科的发展：

数论函数（如黎曼zeta函数）得到严格的处理，解析数论这门学科因此而生。

多叶函数的出现则引起了黎曼曲面的定义。

到了二十世纪，Poincare证明了黎曼曲面上存在唯一的曲率等于-1的黎曼度量。率先引入几何和群论的方法来研究曲面。由于对多体力学问题相空间的构造问题， Poincare 对高维空间产生浓厚的兴趣，也开始奠定拓扑学的主要基础。



一般来说，在研究空间的大范围架构时。拓扑学家希望将空间用代数的方法进行分类。用同调群和基本群来控制空间的架构。他们在研究空间时引进三角化和组合的方法，但对微分拓扑来说主要的方法乃是切割（Surgery）子流形。

由于一般曲面在三维和四维空间会自行相交。因此切割方法在低维空间遇到很大的困难。可是三维和四维空间恰恰是物理学家最为关心的空间。在爱因斯坦发现广义相对论后，我们知道空间会受到重力场影响而变更曲率，空间的拓扑亦随之变动。

二十一世纪几何学的发展有相当重要的部分会是有组织地解决三维和四维空间的问题。除了它们的拓扑性质外，更重要的是空间上的几何和分析问题。

我们从二十世纪黎曼曲面的发展可以约略地猜测未来这个世纪几何和拓扑学的走向。

黎曼曲面有很多独特的性质，而其中最重要的一点是单值化原理。任何一个单连通的曲面都可以用保持角度的方法映射到球面上面去。正如我们现下用的地图是从地球保角不变地映射到平面上。当一艘船只在海上航行时，船长可以在地图上找出准确的方向就是因为保角的缘故。我们发现这种保角投影对任何二维曲面都可以办得到。

在高维空间的单值化也是一个重要的问题，如何找出具体而有意思的问题是很重要的，在复几何的情况下，我在七十年代提出的一系列问题已得到一些解答，但是即使在这个情形下还未全部完成。我曾经证明复空间的 Poincare 猜想, 在二维空间时答案是完满的，但是以下的高维的复Poincare猜想还未解决: 如何证明同伦于射影空间的代数流形必须是射影空间。

弦理论开章明义是研究曲线在时空中振荡的所有经验。而曲线的轨迹就是一个黎曼曲面。弦理论因此对代数曲线的模提供了很多新的数学公式。例如E.Verlinder和Witten的公式，

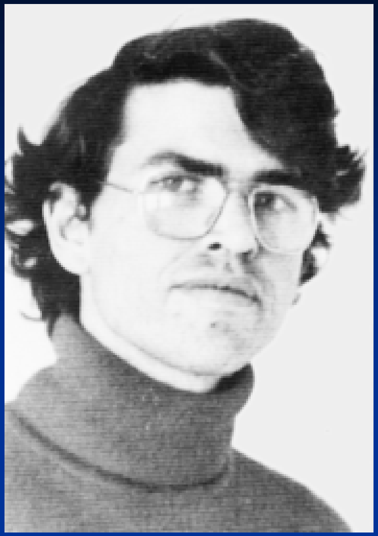
这两个公式的证明在这十五年来的数学界有深入的影响。

三维空间和四维空间是时空的几何，可是我们对他们的了解远没有对黎曼曲面来得深入。可以想象的是本世纪的数学将会促使二维空间的研究提升到三维和四维空间。而将它们变成几何和理论物理的主要工具。弦论学家都同意这个想法，这是近代的膜理论所要求的。

三度空间的拓扑始于Poincare。他提出著名的Poincare猜想。以后经历Dehn， Kneser，Haken， Waldhausen直到Thurston才理出一条清晰的思路。

Poincare认为对任何一个封闭的三度空间，如果任何一条闭曲线都可以连续地收缩到一点，则这个空间必定是三维球面。

这个漂亮的问题吸引了数学家一百年。不单是因为它是一个难题，也因为它是研究三度空间的一个最基本问题。



在1978年，Thurston提出全面了解三维空间的几何化猜测。他认为所有紧致封闭的三度空间必可由八种具有不同几何架构的三度空间构成。除了三维球和商空间外，最重要的乃是双曲空间。

在所谓“足够大”的三度空间情形下，Thurston证明了他的猜想。但是他的方法不可能推展到最一般的三度空间上。

1980年，我的朋友Hamilton发展了一套非线性微分方程组。他利用几何空间的曲率（Ricci曲率）来变动空间的几何。因此得到一些漂亮的定理。于是我建议他用这个方法来证明Thurston的几何化猜测。

这是数学史上一个非常艰巨的事业。用到的工具是非线性方程和黎曼几何的理论。三十年来我们几何分析学家创造出来的定理都投入到这个研究领域里。

Hamilton首先在正曲率的情形下解决了方程收敛性问题，奠定了重要的基础。这里侥幸地避开了微分方程的奇异点问题。但是在一般情形下，奇异点是不可避免的。Hamilton花了二十年的时间去研究奇异点的性质。

对于一个非线性微分方程组，奇异点的架构极为复杂。所幸Hamilton方程乃是抛物形方程，它有比较好的性质。我在1985年与李伟光刚好完成在流形上的线性抛物方程的精细估计。我向Hamilton提出要将这个估计用到他的方程上。

Hamilton因此提出了新的看法来接纳我的建议。他看出我和李伟光的估计办法最好在由他的方程产生的孤立子上去研究。孤立子有很多特殊的性质，因此我们的估计比较容易了解，也可以推展到Hamilton的方程。

在1990年，Hamilton成功地推导了这个估计而得到奇异点的深入研究。这些研究可以说有划时代的重要性。在1995年，他在适当的条件下，找到全部了解Thurston问题的方法。这是极有深度的研究。

但是还有一些奇异点的问题尚未解决。如何控制奇异点切除的问题由Hamilton在四维空间开始研究，但要到三年多以前俄国人Perelman的工作后才有头绪。

Perelman对上述Li－Yau－Hamilton估计做出更深入的了解，仿照他们的方法，引进了新的时空上的长度和体积来控制奇异点的变化。

这些研究极为复杂。三年来很多人尝试补上Perelman尚未证明的空白。直到最近，朱熹平和他的合作伙伴曹怀东才将整个工作完成。Poincare猜想的证明是几何拓扑创立以来最伟大的工作。

我们可以想象二十一世纪的数学家将会花很多功夫来消化和深入研究这些空间的几何和调和分析。然后将三度空间的几何应用到物理学，数论和代数几何中去。

微分方程组的奇异点是十分重要而又非常困难的问题。在工程上，在物理上，在计算数学上都遇到同样的问题。流体力学和广义相对论首要的问题就是如何处理奇异点。上述三度空间的方法应当会有更大发挥威力的地方。除了上述方法成功地处理Hamilton方程的奇异点外，古典的代数几何有Hironaka理论，用blow up的方法成功地处理代数空间的奇异点。希望这些方法能够得到统一。

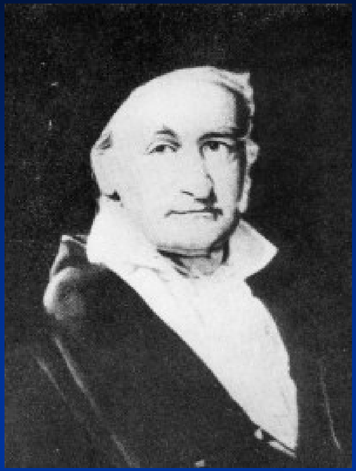
四维空间的研究极为困难。到目前为止连一个让人信服的猜测都没有。最重要的四维流形是由代数曲面形成的，但目前人们还没有办法将其作细致的拓扑分类。四维空间拓扑的第一个突破是由Donaldson引入Yang－Mills理论完成的。以后Seiberg－Witten在九十年代得到另一个突破。总体来说，前途还很漫长。这将是几何学、几何分析学、代数几何学以及物理学一个共同的研究领域。

这使得我们可以用扰动的方法去计算非扰动性的场论，在数学上有惊人的结果。

弦理论发现有不同的量子场论可以互相同构（isomorphic），虽然时空的scale刚好相反。在半径为R的圆上的场论与半径为1/R的圆上的场论同构。因而推出某些强耦合常数（Coupling Constant）的理论可以同另一个弱耦合常数的理论同构，而后者可以从渐进分析理论来计算。(耦合常数可以解释如下，假设场论由 Lagrangian L 给出，我们可以产生新的场论，其Lagrangian 是 L+CL’ 这个常数C就是耦合常数)。

更要注意的一点是时空的架构可能因此有基本理念的改变。极小的空间不再有意义。时空的量子化描述需要更进一步的探讨。物理学家和几何学家都希望能够找寻一个几何架构来描述这个量子化的空间。有不少学人建议用矩阵模式来解释这种现象，虽然未能达到目标，但已得到美妙的数学现象。

约在两百年前，Gauss发现Gauss曲率的理念而理解到内蕴几何时，就觉察到空间的理念与时而变与人类对大自然的了解有密切关系。



这二十年来，超对称的理念深深地影响着基本物理和数学的发展。在实验上虽然尚未发现超对称，但在数学上却起着凝聚各门分支的作用。我们宁愿相信在极高能量时，超对称确实存在。但如何看待超对称在现实时空中的残余，应当会是现代应用物理和应用数学的一个重要命题。

对偶的看法使得我们猜测复几何和辛几何有对偶的关系，大部分重要的动力系统可以在辛几何的架构上来考虑，这是否意味着很多重要的动力系统问题可以变成复几何问题来处理。

一般来说，我们希望用拓扑或代数的方法来描述有意义的子流形，在这个领域里，最重要的问题无过于Hodge猜测。

Hodge猜测的重要性在于它提供一个有效的方法去描述代数流形里面可用多项式来定义的子流形的同调群。无论在代数、算术、还是在几何里，这都是举足轻重的猜测。对于这个世纪的数学发展，这应当是一个重要的命题，很可能是几何分析一个主要目标。在数论里，由Grothendieck、Deligne以来发展的motivic理论试图理解这些子流形。Tate猜测则在算术流形上考虑同样的问题。

我本人相信应当将代数流形推广到一般的复 流形来考虑Hodge 猜测，同时应当考虑更一般的子流形。

数论学家为了研究算术而大胆地改变空间的定义。他们所引进的概念可能在现象界会有真实的意义。其中一个重要的几何叫做Arakelov几何。它在Faltings证明Mordell猜测时得到应用。这是很吸引人的一种几何。我们不单考虑在复数上定义的空间，也考虑同余于p的空间，而且要将所有这些空间一同处理。这种空间是否含有物理意义？

在上述所有讨论里，有两个重要的理念在物理、数学和应用科学中都是非常重要的：

第一个是scale的问题。理论物理学的Hierachy问题就是一个例子。引力场和其它力场的scale相差极远，如何统一，如何解释？在古典物理，微分方程、微分几何和数值分析中都有不同scale融合的问题。在统计物理和高能物理中，用到所谓renormalization group的方法，是非稳定性系统的一个重要方法。

第二个重要的理念是Symmetry（对称）

群和群的表示论的理念

有限群：如镜对称、雪花对称、数论中常用的Galois群。

连续群（李群）：在规范场论中起着重要的作用。

非紧离散群：在数论和几何上的用途。

无限维对称：规范场中的规范群。

Duality比Symmetry更广义，不同理论的广义同构将是二十一世纪重要命题。

对称的理念可说是各门科学中最基本的工具。但运用之妙，存乎一心，在于作者的经验和直觉。二十一世纪基础科学的基本命题：如何将对称的物理基本现象与非对称的世界联合？

Symmetry Breaking

众生色相，何由而生？

基本的物理定律是时间对称的，为何我们担忧时光消逝？因为直观世界不是时间对称的。由时间对称的定律来解释直观世界是现代数学和物理的一个重要问题。

热力学第二基本定律说：Randomness随时间而增。Boltzmann发现Entropy也随时间增长。这是一个奇妙的定理，到如今还未得到彻底的了解。

时间的箭咀在广义相对论中是一个重要的题目。Roger Penrose和Hawking都花了很多时间讨论。这是因为Einstein方程对时间来说是对称的，然而在现实世界，时间是不对称的。如何在广义相对论里定义熵（entropy）是一个重要问题。

今日的演讲，由于时间的缘故，不可能包括其它有趣的数学，尤其是与工程有关的数学。然而很明显的，应用数学需要建立在基本数学上。反过来说，好的工程问题，尤其是现代的电子计算器会提供基础数学不可代替的帮助，而有意义的应用数学的问题也会逐渐变成基础数学主流的一部分。所以我说二十一世纪的数学是趋向统一的。

THANK YOU ALL!