

第五章 Laplace方程

Laplace方程(又称调和方程)和Poisson方程是最典型的椭圆型方程, 它们具有广泛的应用背景, 譬如静电学中的电势以及牛顿万有引力理论中的引力势均满足这类椭圆型方程(它们在静电学和引力理论中分别被称为静电场方程和静态引力场方程)。本章我们介绍关于Laplace方程和Poisson方程的一些基本知识、方法和结果。在第一节中我们介绍了Laplace方程和Poisson方程的导出以及定解条件的提法。在第二节中我们介绍变分法, 着重介绍在物理、力学等领域中具有重要应用的变分问题及变分原理(实际上, 许多常微分方程问题和数学物理方程的定解问题常常可归结为变分问题)。在第三节中我们应用Green公式, 建立了Laplace方程解的平均值定理, 并证明了关于调和函数的极值原理, 进而应用该极值原理证明了第一边值问题解的唯一性和稳定性。在第四节中, 我们首先引入著名的Green函数, 讨论了它的一些基本性质, 并着重介绍了求解特殊区域(球、半空间和圆)上的Laplace方程的第一边值问题解的表达式的静电源法。在第五节中, 我们利用在第四节中建立的Poisson公式进一步讨论了调和函数的另外一些重要性质, 譬如Harnack定理等等。在第六节中我们证明了Laplace方程的强极值原理, 并利用它讨论了Laplace方程的第二边值问题解的唯一性。

§ 1. 方程的导出及定解条件的提法

Laplace方程(又称为调和方程)

$$\Delta u \triangleq \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad (1.1)$$

和Poisson方程

$$\Delta u \triangleq \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x_1, \cdots, x_n) \quad (1.2)$$

是最基本、但也是最重要的一类偏微分方程, 其中 $u = u(x_1, \cdots, x_n)$ 是未知函数, $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是一给定的已知函数。它们具有广泛的应用背景。下面我们以 $n = 2, 3$ 为例, 讨论方程的导出以及定解条件的提法。

1.1 方程的导出

本小节我们讨论Laplace方程和Poisson方程的应用背景及方程的导出。

实例一：静电场的电势

在静电学里我们知道，真空中的Gauss定律的微分形式是

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y, z), \quad (1.3)$$

其中 $\vec{E}(x, y, z)$ 是静电场的电场强度， ε_0 是真空中的介电常数， $\rho(x, y, z)$ 是电荷密度。注意到静电场是无旋的，即

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{等价地, } \operatorname{curl} \vec{E} = 0), \quad (1.4)$$

可知

$$\vec{E} = -\nabla u(x, y, z), \quad (1.5)$$

其中 u 是电势(也称为电位势)。将(1.5)式代入(1.3)式便得到

$$\Delta u(x, y, z) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y, z). \quad (1.6)$$

(1.6)式正是三维空间中的Poisson方程。假如所考虑的区域 Ω 内没有电荷，即 $\rho \equiv 0$ ，则可得三维空间中的Laplace方程

$$\Delta u = 0. \quad (1.7)$$

实例二：静态引力场的引力势

导出Laplace方程的另一个著名实例来自牛顿的万有引力理论。由牛顿的万有引力定律可知，位于点 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ 处质量为 m 的质点对于位于点 $P : (x, y, z)$ 处具有单位质量的质点的引力 $\vec{F}(x, y, z)$ 其大小为 $\frac{m}{r^2}$ ，而作用的方向为 $\overrightarrow{PP_0}$ ，即作用方向沿着这两点的连线指向 P_0 点，其中 $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ 表示点 P_0 与点 P 的距离。 $\vec{F}(x, y, z)$ 可以写成下述向量的形式

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{m}{r^2} \left(\frac{x - x_0}{r}, \frac{y - y_0}{r}, \frac{z - z_0}{r} \right). \quad (1.8)$$

通常称向量值函数 $\vec{F}$ 为引力场函数。注意到(1.8)式，易知引力场函数 $\vec{F}$ 是势函数

$$u(x, y, z) = \frac{m}{r} \quad (1.9)$$

的梯度函数，即

$$\vec{F} = \nabla u.$$

事实上，除了允许相差一个任意常数外，势函数是唯一确定的。

假设所考察的区域 Ω 上的密度函数为 $\rho(x, y, z)$, 则区域 Ω 所产生的引力场应为其上所有各点产生的引力场的叠加, 因此, 区域 Ω 上的质量所产生的总引力势为

$$u(x, y, z) = \iiint_{\Omega} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}. \quad (1.10)$$

直接计算可知, u 在区域 Ω 外满足下述Laplace方程

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad (1.11)$$

而当 $\rho(x, y, z)$ 满足Hölder连续性条件时, u 在 Ω 内满足Poisson方程

$$\Delta u = -4\pi\rho. \quad (1.12)$$

综合(1.11)式及(1.12)式可得引力势 u 满足的方程

$$\Delta u = \begin{cases} 0, & \text{当}(x, y, z) \in \mathbb{R} \setminus \Omega \text{时,} \\ -4\pi\rho, & \text{当}(x, y, z) \in \Omega \text{且 } \rho(x, y, z) \text{为Hölder连续时.} \end{cases} \quad (1.13)$$

实例三：膜平衡方程

在第三章中我们研究了膜的振动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(t, x, y). \quad (1.14)$$

特别地, 当研究在不随时间而变换的外力 $F(x, y)$ 作用下的膜的平衡问题时, 膜的位移函数 u 和时间 t 无关, 此时方程(1.14)可化为膜平衡方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{F(x, y)}{T}. \quad (1.15)$$

(1.15)式就是二维的Poisson方程。

类似地, 从第四章的讨论中, 我们也可以看到当研究稳定状态的热传导问题时, 也会导致Poisson方程。特别地, 在没有热源的情况下, 就得到Laplace方程。

实例四：复变函数论中的解析函数

由复变函数理论知, 一个解析函数的实部和虚部分别满足二维的Laplace方程。

在本章中我们主要介绍Laplace方程(1.1)和Poisson方程(1.2)的基本定解问题以及解的一些基本性质。为此, 我们引入

定义1.1 Laplace方程(1.1)的连续解, 即具有关于自变量的二阶连续偏导数且满足方程(1.1)的连续函数, 称为调和函数。 □

注记1.1 在两个自变量的情形, 调和函数的许多性质, 已经在复变函数论中讨论过了, 这里就不再重复。下面的讨论主要集中在三维情形进行。 □

1.2 定解条件

为了在空间中的某一所考察的区域 Ω 中求解方程(1.1)或(1.2), 还必须提一些定解条件(否则, 一般说来解不唯一)。与前两章不同的是, 由于此时方程以及其解与时间 t 无关, 所以定解条件只能提边界条件。这种定解问题称为边值问题。同前两章一样, 对方程(1.1)或(1.2)我们也可以提三种类型的边值问题, 它们分别称为第一边值问题、第二边值问题和第三边值问题。通常遇到最多的是第一边值问题和第二边值问题, 因此, 本章我们着重介绍第一、二边值问题。

第一边值问题(也称为Dirichlet问题) 在空间 $\mathbb{R}^n$ 中的某一区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上给定一个连续函数 g , 求解这样的函数 $u = u(x_1, \dots, x_n)$ 使得它在 Ω 内满足方程(1.1)(或(1.2)), 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 并且在 $\partial\Omega$ 上满足

$$u|_{\partial\Omega} = g. \quad \square \quad (1.16)$$

边界条件(1.16)称为第一类边界条件, 也称为Dirichlet边界条件。

第二边值问题(也称为Neumann问题) 设有一光滑的闭曲面 Γ 并在其上给一连续函数 g , 求解这样的函数 $u = u(x_1, \dots, x_n)$ 使得它在 Γ 所围成的区域 Ω 的内部满足方程(1.1)(或(1.2)), 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 并且在 Γ 上的任一点沿着 Γ 的单位外法向量 n 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 存在, 并且满足

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g. \quad \square \quad (1.17)$$

边界条件(1.17)通常称为第二类边界条件, 也称为Neumann边界条件。

在实际的应用中, 我们还会经常遇到Dirichlet问题和Neumann问题的另一种提法。譬如如果要求解某物体外部介质的稳定的温度场时, 此时问题就归结为求解区域 Ω (即物体所占据的区域)外的函数 u 使其满足三维的Laplace方程(1.1) (其中 $n = 3$)和边界条件 $u|_{\partial\Omega} = g$, 其中 g 表示物体表面的温度分布函数, 它是已知的。另一个典型的例子来自流体力学。在研究流体力学中著名的绕流问题时, 常常需要确定某有界区域 Ω 外部流场的速度分布。如果所考虑的流体是位势流, 即流场是有势的, 换句话

说, $\vec{u} = \nabla\varphi$, 其中 $\vec{u}$ 是流体的速度函数, φ 是其速度势, 而且所考察的流体是不可压缩的, 那么速度势 φ 在 Ω 的外部满足三维的Laplace方程(1.1) (其中 $n = 3$), 并且在绕流物体的边界 $\partial\Omega$ 上满足 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$. 这样, 决定 Ω 外部流场的速度分布问题就归结为一个求解一个函数使其在曲面 $\partial\Omega$ 外部满足三维Laplace方程, 在 $\partial\Omega$ 上满足所给的边界条件的问题。类似的问题, 在实际中还有很多, 因此这种类型的问题具有重要的应用价值, 我们通常把这类问题称为Laplace方程的外问题。上述第一个例子中所提的问题称为Dirichlet外问题, 而第二个例子中所提的问题称为Neumann外问题。

值得注意的是, Laplace方程的外问题与通常的Laplace方程的定解问题具有不同的特点。譬如, 记以原点为球心的单位球面为 Γ , 考察将 Γ 作为边界曲面的Dirichlet外问题, 其边界条件为

$$u|_{\Gamma} = 1.$$

直接验证易知, 函数 $u_1 \equiv 1$ 及 $u_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ 都在单位球外满足Laplace方程且在边界上满足边界条件。这个例子表明, 如果在无穷远处不加限制, 就不能保证相应的外问题的解的唯一性。也就是说, 为了保证外问题解的唯一性, 必须在无穷远处对解加以合适的限制。那么, 一个自然的问题是如何在无穷远处对解加以限制? 在三维情形, 通常需要解在无穷处的极限为零, 即

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0 \quad (\text{其中 } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \quad (1.18)$$

回到上述的例子, (1.18)式便排除了上面提到的解 $u_1 \equiv 1$ 。

下面以三维的Laplace方程为例, 我们给出其外问题的确切提法。

Dirichlet外问题 在空间 $\mathbb{R}^3$ 的某一闭曲面 Γ 上给定连续函数 g , 求解这样一个函数 $u(x, y, z)$ 使得(i)它在 Γ 的外部区域 Q 内满足Laplace方程; (ii)在 $Q \cup \Gamma$ 上连续; (iii)满足衰减性条件(1.18); (iv)在 Γ 上满足

$$u|_{\Gamma} = g. \quad \square \quad (1.19)$$

Neumann外问题 在光滑的闭曲面 Γ 上给定连续函数 g , 求解这样的一个函数 $u(x, y, z)$ 使得(i)它在闭曲面 Γ 的外部区域 Q 内满足Laplace方程; (ii)在 $Q \cup \Gamma$ 上连续; (iii)满足衰减性条件(1.18); (iv)在 Γ 上的任意一点沿着区域 Q 的单位外法向量 $\vec{n}$ (指向曲面 Γ 的内部)的法向导数 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 存在且满足

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma} = g. \quad \square \quad (1.20)$$

注记1.2 为了和外问题区别起见, 我们有时也把第一、二边值问题分别称为Dirichlet内问题和Neumann内问题。 □

注记1.3 实际上, 对外问题而言, 因为所考察的区域是无穷区域, 因此无穷远处也可以“看成”是所考察区域的特殊的“边界”, 这样在无穷远处对解加以限制就很容易理解了。 □

注记1.4 对一般的 n 维情形的Laplace方程, 类似地可以引入其外问题的概念。 □

注记1.5 对于Poisson方程(1.2)的四种边值问题, 只要求出Poisson方程的一个特解, 由叠加原理, 就能化为Laplace方程(1.1)的对应的边值问题。当 f 满足Hölder 连续性条件时, 这种特解是很容易构造的(譬如, 以 $n = 3$ 为例, (1.10)式就给出了一种构造方法)。因此, 我们以后主要讨论Laplace方程(1.1)的边值问题。 □

习 题

1. 设 $u(x_1, \cdots, x_n) = f(r)$ (其中 $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$)是 n 维调和函数(既满足方程 $u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} = 0$), 试证明

$$f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r^{n-2}} \quad (n \neq 2),$$

$$f(r) = c_1 + c_2 \ln \frac{1}{r} \quad (n = 2),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

2. 证明在球面坐标 (r, θ, φ) 下成立

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

3. 证明在柱面坐标 (r, θ, z) 下成立

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

4. 证明下列函数都是调和函数:

(1) $ax + by + c$ (a, b, c 为常数);

(2) $x^2 - y^2$ 和 $2xy$;

(3) $x^3 - 3xy^2$ 和 $3x^2y - y^3$;

(4) $\operatorname{sh} ny \sin nx$, $\operatorname{sh} ny \cos nx$, $\operatorname{ch} ny \sin nx$ 和 $\operatorname{ch} ny \cos nx$ (n 为常数);

(5) $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \cos y}$ 和 $\frac{\sin y}{\operatorname{ch} x + \cos y}$.

5. 证明用极坐标表示的下列函数都满足Laplace方程:

(1) $\ln r$ 和 θ ;

(2) $r^n \cos n\theta$ 和 $r^n \sin n\theta$ (n 为常数);

(3) $r \ln r \cos \theta - r\theta \sin \theta$ 和 $r \ln r \sin \theta + r\theta \cos \theta$.

6. 用分离变量法求解由下述Laplace方程的第一边值问题所描述的矩形平板($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$)上的稳定温度分布:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u(x, b) = 0. \end{cases}$$

7. 举例说明在二维Laplace方程的Dirichlet外问题中, 如对解 $u(x, y)$ 不加在无穷远处为有界的限制, 那么定解问题的解就不是唯一的。

§ 2. 变分法

在物理、力学等学科中,有些定律是关于能量取极大或极小的,这些定律与描述质量、动量、热量等物理量为守恒或平衡的物理定律具有同等重要的作用。由第三、四章的讨论可知,能量通常可以用积分的形式表示,这种积分表达式的极值问题(或称泛函极值问题)被称为变分问题。常微分方程问题、偏微分方程的定解问题常常可归结为变分问题。譬如, Laplace方程或Poisson方程的定解问题可以由某些物理、力学的变分问题导出,从而Laplace方程或Poisson方程的定解问题可归结为这些变分问题。因此,求解变分问题就显得很重要。本节我们着重介绍与Laplace方程(或Poisson方程)相关的变分问题和变分原理*。变分原理的重要性在于它提供了研究偏微分方程边值问题的一条新途径、一个新方法,同时它也提供了求解偏微分方程边值问题的解(包括近似解)的方法。这种研究方法称为变分法,它在理论研究和实际应用中具有十分广泛的应用背景。变分法的核心思想就是将所讨论的偏微分方程问题转化为求解相应的“积分表达式”(或称能量或称泛函)的极值问题。

2.1 变分问题与Euler-Lagrange方程

在分析力学中, Hamilton变分原理告诉我们, 对保守系统来说, 依赖于广义坐标 $q_i(t) (i = 1, \dots, n)$ 和广义速度 $\dot{q}_i(t) (i = 1, \dots, n)$ 的Lagrange量 $\mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i)$ 在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 上关于时间 t 的积分(通常称该积分为作用量)的变分为零, 即

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i) dt = 0. \quad (2.1)$$

利用上式以及两个端点的约束条件

$$\delta q_i|_{t=t_1} = 0, \quad \delta q_i|_{t=t_2} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

可得到与(2.1)式等价的Lagrange运动方程组

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.2)$$

此外, (2.2)式又与牛顿运动方程相等价。

受(2.1)式的启发, 我们引入变分问题并对其进行较详细的讨论。

在微积分中, 求函数 $y = f(x)$ 的极值是求自变量 x 的值使得当 x 取到这些值时, 函数 f 取到极大(或极小)值。大家知道, 取得极值的必要条件是 $f'(x) = 0$ (然后再

*事实上, 对波动方程、热传导方程有类似的讨论。

由 $f''(x)$ 是否小于(或大于)零来判断 $f(x)$ 是否取得极大(或极小)值)。下面我们将这一思想进行推广。

一、一元函数情形

设 $y = y(x)$ 是在 $[a, b]$ 上有定义的函数。考察下述积分表达式(或作用量)

$$I[y] \triangleq \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (2.3)$$

其中 F 是一给定的函数。从(2.3)式易知, 被积函数 F 依赖于函数 $y = y(x)$, 因而积分值 $I[y]$ 也依赖于函数 $y(x)$ 。这种依赖关系不是传统的自变量和因变量之间的函数关系, 而是函数的函数, 通常称为泛函。泛函的定义域是满足一定条件的函数的集合或空间。变分问题的目的就是求泛函的极值, 换句话说, 就是求出某些函数 $y(x)$ 使得泛函 $I[y]$ 取得极值。

变分问题本质上是求解一类微分方程问题。在本节中我们假定函数 $y(x)$ 和 $F(x, y, y')$ 都是适当光滑的函数。此外, 在本小节中我们还假设函数 $y(x)$ 在 x 的两端点处是固定的, 即

$$y(a) = y_*, \quad y(b) = y^* \quad (2.4)$$

其中 y_* 和 y^* 是常数。下面我们要从满足条件(2.4)的函数集合中求出使得泛函 $I[y]$ 取得极值的函数 $y(x)$ 所满足的微分方程。为此, 我们设想函数 $y(x)$ 本身做微小的改变记为 $\delta y(x)$, 因此改变后的函数为 $y(x) + \delta y(x)$ 。通常我们称 $\delta y(x)$ 为函数 $y(x)$ 的变分。注意到

$$F(x, y + \delta y, y' + \delta y') = F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y',$$

则由(2.3)式易知

$$I[y + \delta y] - I[y] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) (x) dx.$$

上述积分式称为泛函 $I[y]$ 的变分, 记为 $\delta I[y]$, 即

$$\delta I[y] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) (x) dx. \quad (2.5)$$

下面我们证明

引理2.1 泛函 $I[y]$ 取得极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad \square \quad (2.6)$$

证明 设函数 $y = y(x)$ 使得泛函 $I[y]$ 取得极值。特别地，取 $y(x)$ 的变分为

$$\delta y(x) = \varepsilon \eta(x), \quad (2.7)$$

其中 ε 为小参数，而 $\eta(x)$ 是充分光滑的任意函数并且满足

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \quad (2.8)$$

条件(2.8)式是为了保证函数 $y + \varepsilon \eta$ 满足边界条件(2.4)式成立而假设的。见图2.1.

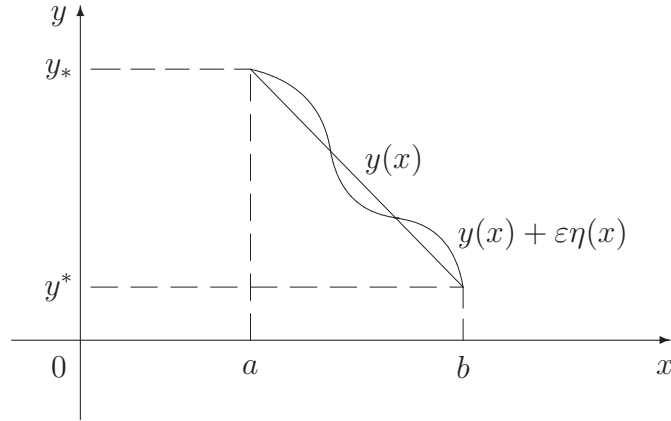


图 2.1: 函数 $y(x)$ 与函数 $y(x) + \varepsilon \eta(x)$

显然，泛函

$$I[y + \varepsilon \eta(x)] = \int_a^b F(x, y(x) + \varepsilon \eta(x), y'(x) + \varepsilon \eta'(x)) dx \quad (2.9)$$

可以看成参数 ε 的函数。又特别地，当 $\varepsilon = 0$ 时，成立 $y(x) + \varepsilon \eta(x) = y(x)$ 。进一步又注意到函数 $y(x)$ 使得泛函 $I[y]$ 取得极值。因此，当 $\varepsilon = 0$ 时，关于 ε 的函数 $I[y + \varepsilon \eta(x)]$ 取得极值，于是应成立

$$\left. \frac{dI[y + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

利用(2.9)式可得

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) (x) dx = 0. \quad (2.10)$$

注意到(2.8)式并应用分部积分，从(2.10)式可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta \right) (x) dx + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right] (x) dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] (x) \eta(x) dx. \end{aligned}$$

又注意到函数 $\eta(x)$ 的任意性，便得到

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

这就证明了引理2.1.证毕。 ■

通常我们称方程(2.6)为Euler-Lagrange方程，简称E-L方程。

二、多元函数情形

设泛函依赖于多元函数，譬如依赖于 n 元函数 $u(x_1, \dots, x_n)$ ，即

$$I[u] = \int \cdots \int_{\Omega} F(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), u_{x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, u_{x_n}(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \cdots dx_n, \quad (2.11)$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域，并且我们假设在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上函数 u 的值是给定的，即

$$u|_{\partial\Omega} = g(x_1, \dots, x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega. \quad (2.12)$$

类似于引理2.1，我们有

引理2.2 泛函 $I[u]$ 取得极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \right) = 0. \quad \square \quad (2.13)$$

证明 设函数 $u = u(x_1, \dots, x_n)$ 使得泛函 $I[u]$ 取得极值。同前一样，我们设想函数 $u(x) \triangleq u(x_1, \dots, x_n)$ 本身做微小改变，记为 $\delta u(x)$ ，因而改变后的函数为 $u(x) + \delta u(x)$ 。同样 $\delta u(x)$ 被称为函数 $u(x)$ 的变分。特别地，取 $\delta u(x) = \varepsilon \eta(x)$ ，其中 ε 为一小参数， $\eta(x) = \eta(x_1, \dots, x_n)$ 是适当光滑的任意函数且满足

$$\eta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.14)$$

条件(2.14)是为了保证 $u + \varepsilon \eta$ 满足边界条件(2.12)式而假设的。类似于一元函数情形，应成立

$$\left. \frac{dI[u + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

注意到(2.11)式，从上式可得

$$\int \cdots \int_{\Omega} \left[\frac{\partial F}{\partial u} \eta + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \eta_{x_i} \right] (x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0. \quad (2.15)$$

利用Green公式并注意到(2.14)式, 从(2.15)式可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int \cdots \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial u} \eta dx_1 \cdots dx_n + \int_{\partial\Omega} \eta (\nabla_{Du} F \cdot \vec{n}) ds - \int \cdots \int_{\Omega} \eta \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{u_{x_i}}) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{\Omega} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{u_{x_i}}) \right] dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中 $\eta = \eta(x)$ 是满足边界条件(2.14)式的、定义在 Ω 上的任意的适当光滑函数, $\nabla_{Du} F = (F_{u_{x_1}}, \cdots, F_{u_{x_n}})$, 而 $\vec{n}$ 表示边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。进一步, 注意到函数 η 的任意性, 从(2.16)式易知

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \right) = 0. \quad (2.17)$$

这就证明了所要证的(2.13)式。证毕。 ■

(2.13)式通常被称为泛函(2.11)的Euler-Lagrange方程, 简称E-L方程。

特别地, 如果 F 具有下述形式

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2,$$

则其相应的E-L方程正是著名的Laplace方程, 即

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

注记2.1 类似地, 我们可以将泛函推广到依赖于多个函数的情形, 即

$$I[u_1, \cdots, u_m] = \int \cdots \int_{\Omega} F(x, u_1(x), \cdots, u_m(x), Du_1(x), \cdots, Du_m(x)) dx_1 \cdots dx_n,$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $Du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right)$ 。上述泛函的Euler-Lagrange方程组可类似地求出, 这里从略。另外, 如果泛函不仅依赖于函数 u 的本身以及其一阶偏导数, 而且还依赖于函数 u 的高阶偏导数, 那么对这种更加一般的情形, 也可做类似的推广, 留给有兴趣的读者完成。 □

三、端点值可变的情形

在上面的两小段中, 我们讨论了其端点或边界上的函数值固定情况下的变分问题, 本小段中我们讨论其端点或边界上的函数值是可变的情况。

首先考察泛函(2.3)在如下条件下的变分问题

$$y(a) = y_0, \quad y(b) \text{ 是可变的}, \quad (2.18)$$

这里 y_0 是一给定的常数。下面我们证明，在端点 $x = b$ 处函数 y 实际上也应满足某种边界条件，而这种边界条件也可以从泛函(2.3)的极值条件中直接得出。

事实上，如果某曲线 $y = y(x)$ 与所有在点 $x = b$ 处的值可变的邻近曲线相比使得泛函 $I[y]$ 取得极值，那么在点 $x = b$ 处取固定值 $y(b)$ 的条件下该曲线 $y = y(x)$ 与其它曲线相比也应该使 $I[y]$ 取得极值。因此，此时(2.3)式中的被积函数 $F(x, y(x), y'(x))$ 仍然满足E-L方程(2.16)式。类似地，取 $\delta y(x) = \varepsilon \eta(x)$ ，其中 ε 为小参数， $\eta(x)$ 是任意的适当光滑的函数且满足条件

$$\eta(a) = 0. \quad (2.19)$$

类似于(2.16)式的证明，由

$$\left. \frac{dI[y + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

可得

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0. \quad (2.20)$$

注意到边界条件(2.19)式以及此时E-L方程(2.16)式仍然成立的事实，并利用 $\eta(b)$ 的任意性，从(2.20)式可得

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=b} = 0. \quad (2.21)$$

通常称边界条件(2.21)式为自然边界条件。自然边界条件给出了在端点 b 处 $y(b)$ 与 $y'(b)$ 之间的关系。

最后，我们考虑泛函

$$I[u] = \iint_{\Omega} F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy + \int_{\partial\Omega} G(s, u, u_s) ds, \quad (2.22)$$

其中 Ω 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一个区域， s 表示从边界线 $\partial\Omega$ 上的某点算起的弧长， $u_s = \frac{\partial u}{\partial s}$ ，而被积函数 F ， G 都是已知的。类似于引理2.2的证明，我们有

引理2.3 泛函 $I[u]$ (见(2.22)式)取得极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0 \quad (2.23)$$

以及在边界 $\partial\Omega$ 上成立

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial G}{\partial u_s} \right) \right] \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad \square \quad (2.24)$$

引理2.3的证明类似于引理2.2的证明。只需在证明过程中注意到 $\delta u(x, y)$ 在 $\partial\Omega$ 上是任意的便可导出自然边界条件(2.24)式。详细证明这里从略。

特别地，如果泛函(2.22)式中的 F 和 G 分别取为

$$F = u_x^2 + u_y^2, \quad G = \sigma u^2, \quad (2.25)$$

其中 σ 是 $\partial\Omega$ 上的已知函数但不依赖于函数 u 及其偏导数，那么此时的E-L方程为

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (2.26)$$

而自然边界条件为

$$\left(u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} + \sigma u \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

等价地，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.27)$$

其中 n 为边界 $\partial\Omega$ 上各点的外法向量。显然，(2.27)式就是关于 u 的第三类边界条件，这样(2.26)式和(2.27)式就构成了Laplace方程具有第三类边界条件的定解问题。由此可以看出，该定解问题可以作为一个变分问题的结果而导出。

对高维的情形，我们可做类似的推广，这里从略。

除了上述讨论的几类变分问题之外，还有带约束条件的变分问题，也就是在某些约束条件下求泛函的极值问题。这里从略。

2.2 变分原理

变分原理在变分法、偏微分方程理论中具有十分重要的作用，它将求泛函极值的变分问题与求偏微分方程的定解问题联系起来，为求解偏微分方程提供了一条新途径。我们通过一个具体例子——薄膜的平衡问题，来介绍变分原理。

设有一处于张紧状态的薄膜，其水平位置为 Oxy 平面上的区域 Ω ，在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上已知膜的垂直位移为 $g(x, y)$ 。用函数 $u(x, y)$ 表示膜上坐标为 (x, y) 的点在膜平衡时的位移。此外，我们进一步假设膜的内部还受到垂直于水平位置(即垂直于平面 Oxy)的密度为 $\tilde{f}(x, y)$ 的外力作用。下面我们讨论膜处于平衡状态时的形状。为此，我们需要下面的力学中的基本原理之一——最小总势能原理：

受外力作用的弹性体，在满足已知的边界位移约束的一切可能位移中，平衡状态时的位移使得物体的总势能达到最小。

根据弹性力学理论, 我们知道

总势能 = 应变能 - 外力做的功,

即

$$V = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \tilde{f}u \right\} dxdy,$$

其中 T 为膜的张力的大小(参见第三章第六节中的(6.7)式)。以 $J(u)$ 表示总位能, 忽略常数因子, $J(u)$ 可写成

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dxdy, \quad (2.28)$$

其中 $f = \frac{\tilde{f}}{T}$.

因为膜在边界上的垂直位移是给定的(即为已知的函数 $g(x, y)$), 所以, “一切可能的位移”就是指所有具有一定的光滑性且在边界上垂直位移为 g 的位移函数。如果引入函数集合

$$V_0 = \{v | v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \quad v|_{\partial\Omega} = g\}, \quad (2.29)$$

则一切可能的位移函数正好构成 V_0 中元素的全体。于是, 最小总势能原理可用下述数学形式表述: 如果 u 是使得薄膜处于平衡状态的位移函数, 那么 $u \in V_0$ 且满足

$$J(u) = \min_{v \in V_0} \{J(v)\}. \quad (2.30)$$

正如上一小节所讨论的那样, 变分问题和Laplace方程或Poisson方程的边值问题有密切的联系。对于变分问题(2.30)和下述的定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases} \quad (2.31)$$

我们有

定理2.1 (变分原理或称Dirichlet原理) 如果满足(2.30)式的函数 $u \in V_0$ 存在, 那么它一定满足(2.31)式; 反之, 如果 u 是定解问题(2.31)属于 V_0 的解, 那么 u 一定也是变分问题(2.30)的解。 $\square$

证明 如果 u 是变分问题(2.30)的解, 并注意到此时相应于(2.11)式中的被积函数 F 具有下述形式

$$F = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu,$$

那么由(2.13)式可由(2.28)式所确定的泛函的E-L方程

$$\Delta u + f = 0.$$

另一方面, 又注意到 $u \in V_0$, 由 V_0 的定义(见(2.29)式)可知

$$u|_{\partial\Omega} = g.$$

因此, u 是定解问题(2.31)的解。

反之, 如果 $u \in V_0$ 并且是Poisson方程的定解问题(2.31)的解, 那么对任意给定的函数 $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 且 $w|_{\partial\Omega} = 0$ 成立

$$\iint_{\Omega} (\Delta u + f) w dx dy = 0.$$

利用Green公式(详见下一节)易知

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - f w \right) dx dy = 0. \quad (2.32)$$

任给 $v \in V_0$, 令 $w = v - u$. 显然, 此时成立

$$w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \quad \text{且} \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.33)$$

于是, 对这样的 w , (2.32)式成立。直接计算 $J(v)$ 并利用(2.32)式可得

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + w) = J(u) + \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - f w \right) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &= J(u) + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

注意到(2.33)式, 我们有

$$J(v) \geq J(u),$$

并且等号当且仅当 $w \equiv 0$ 时成立。这样我们就证明了 u 满足(2.30)式, 也就是说, u 也是变分问题(2.30)的解。定理2.1证毕。 ■

变分原理给我们研究偏微分方程的边值问题提供了一个新方法。但是变分原理(即定理2.1)本身并没有告诉我们 $J(v)$ 是否存在使其取得极小值的元素, 更没有告诉我

们 $J(v)$ 是否在 V_0 中取到极小值。因此，如果要用变分方法来研究Poisson方程的定解问题(2.31)，尚有一系列基础性的工作要做。随着近代数学的发展，诸如积分(2.28)在哪种函数集合中确实存在极小值等问题都给予了详细的论述和严格的论证，从而确立了变分原理在偏微分方程理论中的重要作用，并进一步发展成为一个新的分支—变分法。

2.3 变分问题与定解问题的求解

从上面的讨论可知，泛函的变分问题可以归结为带有一定的边界条件的E-L方程，如果将定解问题的(常、偏)微分方程看作为某变分问题的E-L方程，那么解出这个变分问题就得到原来定解问题的解。下面我们通过一个具体例子来介绍如何将定解化为一个变分问题，最后介绍一种求解变分问题的方法。

一、化定解问题为变分问题

我们仅以下面的定解问题为例来说明如何将适当的定解问题归结为变分问题。考察下述定解问题

$$(\Delta + k^2)u = -f \quad (\text{在 } \Omega \text{ 上}), \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_{\partial\Omega} = g, \quad (2.35)$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一区域，其边界记为 $\partial\Omega$ ， k 为常数， f 是定义在 Ω 上的已知函数， g 是定义在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的已知函数， σ 是定义在 $\partial\Omega$ 上已知函数，而 n 是边界 $\partial\Omega$ 上各点的外法向量。

定义如下泛函

$$\tilde{I}[u] \triangleq \iint_{\Omega} u \{ (\Delta + k^2)u + 2f \} dx. \quad (2.36)$$

利用Green公式(详见下一节)，即对任意的 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 成立

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} v \Delta u dx, \quad (2.37)$$

我们有

$$\tilde{I}[u] = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \iint_{\Omega} k^2 u^2 dx + 2 \iint_{\Omega} f u dx. \quad (2.38)$$

利用边界条件(2.35)，上式可写成

$$\tilde{I}[u] = \int_{\partial\Omega} g u ds - \int_{\partial\Omega} \sigma u^2 ds - \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \iint_{\Omega} k^2 u^2 dx + 2 \iint_{\Omega} f u dx.$$

对上述泛函求变分并利用(2.37)式可得

$$\begin{aligned}\delta\tilde{I}[u] &= 2 \iint_{\Omega} [(\Delta + k^2)u + f] \delta u dx - 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds - 2 \int_{\partial\Omega} \sigma u \delta u ds + \int_{\partial\Omega} g \delta u ds \\ &= 2 \iint_{\Omega} [(\Delta + k^2)u + f] \delta u dx - \int_{\partial\Omega} g \delta u ds,\end{aligned}$$

其中上式最后一步利用了边界条件(2.35)式。因此，为了得到方程(2.34)我们取如下泛函代替由(2.36)式所定义的泛函 $\tilde{I}[u]$

$$\begin{aligned}I[u] &\triangleq \tilde{I}[u] + \int_{\partial\Omega} g u ds \\ &= \iint_{\Omega} u \{(\Delta + k^2)u + 2f\} dx + \int_{\partial\Omega} g u ds.\end{aligned}\tag{2.39}$$

这样，原定解问题(2.34)-(2.35)可归结为边界条件(2.35)下泛函(2.39)的变分问题。

二、Rayleigh-Ritz方法

求解变分问题，目前已发展了不少的方法。下面我们简单介绍一种求泛函极值的近似方法，被称为Rayleigh-Ritz方法。我们仅以如下的泛函求极小值为例来说明这种近似方法的基本思想。事实上，下面介绍的方法对于前述的各种形式的泛函均适用。

考虑下述泛函的极小值问题

$$I[y] \triangleq \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \tag{2.40}$$

$$y(a) = y_*, \quad y(b) = y^*, \tag{2.41}$$

其中 y_* 和 y^* 是两个常数。选取含有 n 个参数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 并满足边界条件(2.41)式的试验函数，记为

$$\tilde{y}(x) = \varphi(x; c_1, \dots, c_n), \tag{2.42}$$

作为函数 $y(x)$ ，并将它代入泛函(2.40)式，这样 $I[\tilde{y}]$ 成为参数 $c_1, \dots, c_n$ 的函数，记之为 $I[c_1, \dots, c_n]$ 。由函数取极值的条件

$$\frac{\partial I[c_1, \dots, c_n]}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

可求得使泛函 $I[\tilde{y}]$ 取极小值的一组参数值 c_i ($i = 1, 2, \dots, n$)，于是，这时的函数(2.42)就是原问题(2.40)-(2.41)的近似解。

这种方法的关键在于选取适当的满足边界条件的试验函数。

习 题

1. 考虑下述泛函

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx$$

而且

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2, \quad y'(a) = y_3, \quad y'(b) = y_4,$$

其中 y_i ($i = 1, 2, 3, 4$)是常数。证明其E-L方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0.$$

2. 求下列泛函的极值曲线

$$(1) I[y] = \int_a^b \sqrt{y(1+y'^2)} dx;$$

$$(2) I[y] = \int_a^b \frac{y'^2}{x^3} dx;$$

$$(3) I[y] = \int_a^b (x^2 - y^2 + y''^2) dx.$$

3. 求下述泛函的E-L方程组

$$I[y, z] \triangleq \int_a^b F(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)) dx$$

而且

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2, \quad z(a) = z_1, \quad z(b) = z_2,$$

其中 y_1, y_2, z_1, z_2 是常数。

4. 设

$$J(v) = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} \sigma u^2 - gu \right\} ds,$$

考察变分问题：求 $u \in V$ ，使

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v),$$

其中 $V = C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. 试导出与其等价的边值问题，并证明它们的等价性。

§ 3. 调和函数

本节我们介绍调和函数及其一些重要性质，譬如平均值公式和极值原理。首先我们介绍Green第一公式和第二公式，这两个公式在今后的讨论中具有广泛的应用，利用Green公式我们导出了调和函数的基本积分公式，在此基础上我们证明了调和函数的平均值定理，然后利用该定理我们介绍并证明了调和函数的另一个基本而重要的性质—极值原理，最后利用极值原理我们讨论了Laplace方程的Dirichlet内问题和外问题解的唯一性及稳定性。

3.1 Green公式

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的以充分光滑的曲面 Γ 为边界的有界区域(可以是单连通区域，也可以是多连通区域)，而 $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ 和 $R(x, y, z)$ 是定义在 $\bar{\Omega} \triangleq \Omega \cup \Gamma$ 上的任意的连续函数且在 Ω 内有连续的偏导数，则成立

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_{\Gamma} (P\alpha_1 + Q\alpha_2 + R\alpha_3) dS, \quad (3.1)$$

其中 dV 是体积微元， dS 是曲面 Γ 上的面积微元，而

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\cos(\vec{n}, x), \cos(\vec{n}, y), \cos(\vec{n}, z)), \quad (3.2)$$

这里 $\vec{n}$ 表示 Γ 的外法线方向。

设 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. 在(3.1)式中令

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u \frac{\partial v}{\partial z},$$

可得

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v dV = \iint_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dV, \quad (3.3)$$

其中

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

即 Δ 为Laplace算子，而 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示外法向方向导数。通常称(3.3)为Green第一公式。

在(3.3)式中将函数 u 和 v 的位置相交换可得

$$\iiint_{\Omega} v \Delta u dV = \iint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dV. \quad (3.4)$$

(3.3)式两端和(3.4)式两端分别相减便得到

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (3.5)$$

我们称(3.5)式为Green第二公式。Green公式在今后的讨论中要经常用到。

3.2 基本积分公式

利用Green公式，我们首先求出调和函数的积分表达式。为此，我们考察函数

$$v = r_{P_0P}^{-1} = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2}, \quad (3.6)$$

其中 $P_0 \triangleq (x_0, y_0, z_0)$ 是区域 Ω 内的某一给定的点，而 $P \triangleq (x, y, z)$ 是可变的点。容易验证，函数 $v = \frac{1}{r_{P_0P}}$ 除在 P_0 点处它处处满足Laplace方程

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (3.7)$$

该函数在三维Laplace方程(3.7)的研究中具有重要作用，因此，我们称它为三维Laplace方程的基本解。注意到函数 v 在区域 Ω 内有一个奇点 P_0 ，因此我们对 v 不能直接应用Green公式。为了应用Green公式，我们在 Ω 内除去一个以 P_0 为中心、以充分小的正数 ε 为半径的小球 B_ε 的区域(即 $\Omega \setminus B_\varepsilon$)上考虑，因为在此区域(即 $\Omega \setminus B_\varepsilon$)中函数 v 是连续可导的。于是在区域 $\Omega \setminus B_\varepsilon$ 上对调和函数 u 和上述的函数 v 应用Green第二公式(3.5)可得

$$\iiint_{\Omega \setminus B_\varepsilon} (u\Delta r^{-1} - r^{-1}\Delta u) dV = \iint_{\Gamma \cup \partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - r^{-1} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS, \quad (3.8)$$

其中 ∂B_ε 表示小球 B_ε 的球面。一方面，注意到在区域 $\Omega \setminus B_\varepsilon$ 内成立

$$\Delta u = 0, \quad \Delta r^{-1} = 0. \quad (3.9)$$

另一方面，注意到在球面 ∂B_ε 上，成立

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

于是，

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} u \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B_\varepsilon} u dS = 4\pi \bar{u}, \quad (3.10)$$

其中 $\bar{u}$ 表示函数 u 在球面 ∂B_ε 上的平均值。类似地，有

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 4\pi \varepsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial n}}, \quad (3.11)$$

其中 $\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}$ 表示函数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在球面 ∂B_ε 上的平均值。因此, 从(3.8)式我们得到

$$\iint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - r^{-1} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + 4\pi \bar{u} - 4\pi \varepsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = 0.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 可得

$$u(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left(u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{P_0 P}} \right) - \frac{1}{r_{P_0 P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right) dS_P. \quad (3.12)$$

上式表明, 对于在 $\bar{\Omega}$ 上有一阶连续偏导数的调和函数 u , 它在区域 Ω 内的任一点 P_0 处的值可以通过积分公式(3.12)式用该函数及其法向导数在区域边界 Γ 上的值给出。通常我们称(3.12)式为调和函数 u 的基本积分公式。

上面的推导是在假设所考察的点 P_0 在区域 Ω 内进行的。如果点 P_0 在 Ω 外或落在 Ω 的边界 Γ 上, 可类似地给出其基本积分公式。把这三种情形下的基本积分公式综合起来可写成如下形式

$$\iint_{\Gamma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS = \begin{cases} 0 & P_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ -2\pi u(P_0) & P_0 \in \Gamma, \\ -4\pi u(P_0) & P_0 \in \Omega, \end{cases} \quad (3.13)$$

如果 u 在 $\bar{\Omega}$ 上有连续的一阶偏导数, 而在 Ω 内满足 Poisson 方程

$$\Delta u = f, \quad (3.14)$$

类似于(3.12), 我们有

$$u(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left(u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{P_0 P}} \right) - \frac{1}{r_{P_0 P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right) dS_P - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{f(P)}{r_{P_0 P}} dV_P. \quad (3.15)$$

积分公式(3.15)的证明, 这里从略。

注意到(3.12)式, 易知(3.15)式中的右端第一项是一个调和函数。于是, 利用叠加原理可得

$$v(P_0) \triangleq -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{f(P)}{r_{P_0 P}} dV_P \quad (3.16)$$

是 Poisson 方程(3.14)的一个特解。

3.3 基本性质

首先我们利用 Green 公式给出调和函数的如下重要性质。

定理3.1 假设函数 u 在以曲面 Γ 为边界的区域 Ω 内满足Laplace方程(即 u 在 Ω 内是调和函数), 并且在 $\bar{\Omega} \triangleq \Omega \cup \Gamma$ 上有一阶连续的偏导数, 那么成立

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \quad \square \quad (3.17)$$

证明 只需在公式(3.5)中取 u 为所给的调和函数, 而取 $v \equiv 1$, 便得到所要证的(3.17)式。证毕。 ■

由定理3.1立即得到

推论3.1 Laplace方程的定解问题(即带Neumann边界条件的内问题)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x \in \Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = f & (x \in \Gamma) \end{cases}$$

有解的必要条件是边界条件 f 满足

$$\iint_{\Gamma} f dS = 0. \quad \square$$

其次我们利用调和函数的基本积分公式来证明调和函数的平均值公式, 该公式反映了调和函数的另一重要特性。

定理3.2 (平均值公式) 设 u 是 $\mathbb{R}^3$ 中某区域 Ω 内的调和函数, P_0 是 Ω 内的任意给定的一点, 那么对以 P_0 为球心、以 a 为半径且完全落在区域 Ω 内部的球面 ∂B_a , 成立

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\partial B_a} u dS. \quad \square \quad (3.18)$$

证明 将公式(3.12)应用到点 P_0 以及球面 ∂B_a 上, 可得

$$u(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial B_a} \left(u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{P_0 P}} \right) - \frac{1}{r_{P_0 P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right) dS_P. \quad (3.19)$$

注意到在球面 ∂B_a 上

$$r_{P_0 P} = a.$$

于是, 由定理3.1知

$$\iint_{\partial B_a} \frac{1}{r_{P_0 P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} dS_P = \frac{1}{a} \iint_{\partial B_a} \frac{\partial u(P)}{\partial n} dS_P = 0. \quad (3.20)$$

另一方面, 注意到

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{\partial B_a} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{\partial B_a} = -\frac{1}{r^2} \Big|_{\partial B_a} = -\frac{1}{a^2},$$

我们有

$$\iint_{\partial B_a} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -\frac{1}{a^2} \iint_{\partial B_a} u dS. \quad (3.21)$$

这样, 利用(3.20)式和(3.21)式, 从(3.19)式可得

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\partial B_a} u dS.$$

这正是所要证明的(3.18)式。证毕。 ■

注记3.1 在证明定理3.2的过程中, 我们利用了基本积分公式(3.12), 而公式(3.12)是在假设函数 u 在球面上的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 存在的情形下推导出来的。如果仅仅假设函数 $u(P)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 在 Ω 内是调和的, 那么仅根据上式的讨论, 我们还不能断言对于一个同 Γ 相切的球面 ∂B_a 也有(3.18)式成立。但是, 注意到公式(3.18)对任意一个 $a < a_0$ 的球面 ∂B_a 总是成立的(见图3.1), 通过取极限 $a \rightarrow a_0$, 便可得到对球面 ∂B_{a_0} 也成立公式(3.18)的结论。 □

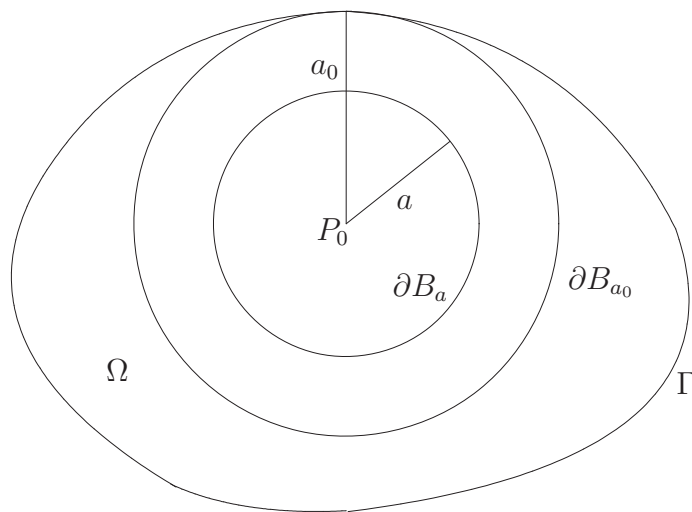


图 3.1: 具有同一球心的球面 ∂B_a 和 ∂B_{a_0}

3.5 极值原理

极值原理是调和函数的另一重要特性。通俗地讲, 不恒等于常数的调和函数不可能在区域内部取到最大或最小值。譬如, 以稳定的温度场为例, 热量由外面流入介质, 经过介质内部而流出, 进而达到平衡状态。显然, 当介质内部没有热源时, 温度分布不可能在介质内部有最高点或最低点, 否则的话, 由于热量要从温度高的地方流向温

度低的地方，这样就会破坏温度的平衡分布状态，因此，温度分布的最高点和最低点必落在介质的边界上。上述事实可以由下述定理准确地描述出来。

定理3.3 (极值原理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的连通区域， $u = u(x, y, z)$ 是定义在 Ω 上的不恒等于常数的调和函数，则它在区域 Ω 上的任何内点上的值不可能是 u 在 Ω 上的上界或下界。 $\square$

证明 只需对上界的情形进行证明即可。因为如果上界情形获证，只需注意到 $-u$ 是 Ω 上的调和函数，因而它在 Ω 的内部不可能取到它的上界，所以 u 也不可能在 Ω 内部取到它的下界。

用反证法证明。设调和函数 u 不恒为常数，且在 Ω 上的上界为 m (如果其上界不存在，则定理3.3的结论自然成立)。现假设 u 在 Ω 中的某一内点，记为 P_0 ，取到 m ，下面我们推出矛盾。

以 P_0 为球心，以 $r > 0$ 为半径作球 B_r ，这里 r 是任意正数，但要求球 B_r 要完全落在区域 Ω 中。现在我们断言：在球 B_r 的球面 ∂B_r 上成立 $u \equiv m$ 。事实上，如果 u 在球面 ∂B_r 上的某一点 P 处其值小于 m ，则由 u 的连续性，必存在 P 点在球面 ∂B_r 上的一个邻域使得在该邻域内有 $u < m$ 。因此， u 在球面 ∂B_r 上的平均值应满足

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B_r} u dS < \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B_r} m dS = m. \quad (3.22)$$

但是，由平均值公式(3.18)知

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B_r} u dS = u(P_0) = m.$$

这显然与(3.22)式矛盾。故在球面 ∂B_r 上成立 $u \equiv m$ 。类似可证，对以 P_0 为球心，以任意的 $\tilde{r} \leq r$ 为半径的球面 $\partial B_{\tilde{r}}$ 上成立 $u \equiv m$ 。因此，在整个球 B_r 上成立 $u \equiv m$ 。

现在证明对 Ω 中的所有点场成立 $u = m$ 。任取一点 $P \in \Omega$ ，在 Ω 区域内做连接两点 P_0 和 P_1 的折线 l 以及完全落在 Ω 区域内的有限个球 B_{r_i} ($i = 1, \dots, m$)使得 $\cup_{i=1}^m B_{r_i} \supseteq l$ 且 B_{r_1} 的球心为 P_0 ， B_{r_2} 的球心落在 B_{r_1} 内， $\dots$ ， B_{r_n} 的球心落在 $B_{r_{n-1}}$ 内(见图3.2)。利用上面的方法，我们

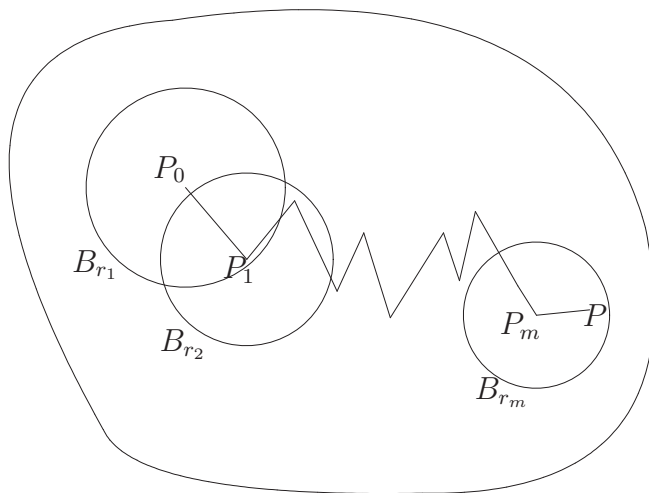


图 3.2: 曲线 l 和覆盖它的有限个球 B_{r_i}

可以依赖证明在每个球 B_{r_i} ($i = 1, \dots, m$)中均成立 $u = m$ 。特别地，在 P 点处也成立 $u(P) = m$ 。又注意到 P 的任意性可知，在整个 Ω 区域上均成立 $u \equiv m$ 。这和函数 u 不恒等于常数相矛盾。故 u 在 Ω 内部不可能取到它的上界。证毕。 ■

推论3.2 设函数 u 在有限区域 Ω 内是调和的，且在 $\bar{\Omega}$ 上连续，则 u 必在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上取得其最大值和最小值。 □

推论3.3 设 u 和 v 都是区域 Ω 内的调和函数且在 $\bar{\Omega}$ 上连续。如果在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上成立 $u \leq v$ ，那么在 Ω 内也成立上式不等式，即

$$u(x, y, z) \leq v(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \Omega.$$

特别地，只有在边界 $\partial\Omega$ 上成立 $u \equiv v$ ，在 Ω 内才会有等号成立的可能。 □

3.5 Laplace方程的第一边值问题解的唯一性和稳定性

利用极值原理，我们可以得到Laplace方程(甚至Poisson方程)的Dirichlet(内、外)问题解的唯一性和稳定性。

首先考虑Dirichlet内问题

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x), \end{cases} \quad (3.23)$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中一区域，其边界为 $\partial\Omega$ ，而 g 是给定的一个定义在 $\partial\Omega$ 上的连续函数。我们有

定理3.4 如果问题(3.23)的解存在, 那么它必是唯一的, 而且连续地依赖于所给的边界条件 g 。 $\square$

证明 假设定解问题(3.23)有两个解, 分别记为 u_1 和 u_2 。注意到它们在边界 $\partial\Omega$ 上完全相同, 即 $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} \equiv 0$, 又注意到它们的差 $u = u_1 - u_2$ 在 Ω 内也满足Laplace方程, 于是, 由极值原理可知, 函数 u 在区域 Ω 上的最大值和最小值均为零, 即 $u \equiv 0$ 。因此, $u_1 \equiv u_2$ 。这表明定解问题(3.23)的解是唯一的。

下面证明定解问题(3.23)解的稳定性。

设在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上给定两个函数 g_1 和 g_2 , 而且在 $\partial\Omega$ 上成立

$$|g_1 - g_2| \leq \varepsilon, \quad (3.24)$$

其中 ε 是一个给定的正常数。设 u_1 和 u_2 分别是对应于边界条件 g_1 和 g_2 的解, 则调和函数 $u_1 - u_2$ 在 $\partial\Omega$ 上值为 $g_1 - g_2$ 。于是, 由极值原理可知, 在 Ω 上各点成立

$$\begin{cases} \max_{\bar{\Omega}}\{u_1 - u_2\} = \max_{\partial\Omega}\{g_1 - g_2\} \leq \varepsilon, \\ \min_{\bar{\Omega}}\{u_1 - u_2\} = \min_{\partial\Omega}\{g_1 - g_2\} \geq -\varepsilon. \end{cases}$$

故有

$$\max_{\bar{\Omega}}\{|u_1 - u_2|\} \leq \max_{\partial\Omega}\{|g_1 - g_2|\} \leq \varepsilon. \quad (3.25)$$

上式表明定解问题(3.23)的解连续地依赖于所给的边界条件。证毕。 $\blacksquare$

现在我们考察Dirichlet外问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \forall x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x), & \forall x \in \partial\Omega, \\ u \rightarrow 0, & \text{当 } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.26)$$

定理3.5 如果定解问题(3.26)的解存在, 那么它必是唯一的, 而且连续地依赖于所给的边界条件 g 。 $\square$

证明 假设 u_1 和 u_2 是定解问题(3.26)的两个解, 令 $u = u_1 - u_2$, 显然 u 是调和函数并满足

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.27)$$

以及

$$u(x, y, z) \rightarrow 0, \quad \text{当 } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty \text{ 时}. \quad (3.28)$$

如果 u 不恒等于零, 则一定存在一点 $P \in \Omega$ 使得 $u(P) \neq 0$, 不妨假设 $u(P) > 0$. 取充分大的 R 并做以原点为球心, 以 R 为半径的球 B_R 使得点 P 落在由边界 $\partial\Omega$ 以及球面 ∂B_R 所围成的区域 Ω_R 中(见图3.3)。

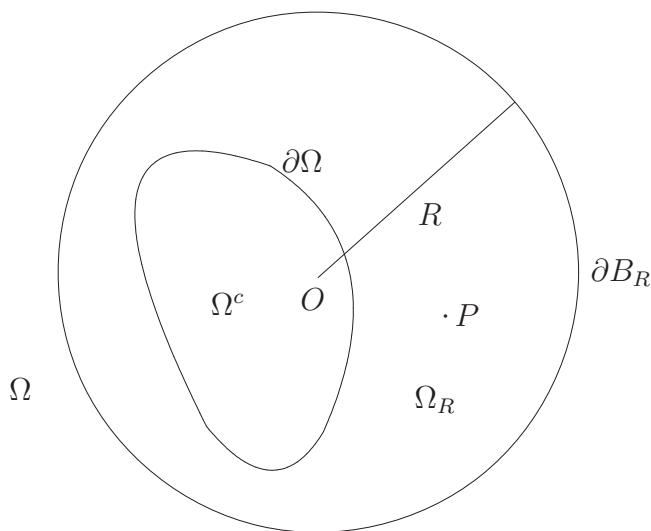


图 3.3: 区域 Ω 、 Ω_R 及 Ω 的补集 Ω^c

注意到(3.28)式, 当 R 充分大时, 在球面 ∂B_R 上有

$$u|_{\partial B_R} < u(P). \quad (3.29)$$

结合(3.27)式及(3.29)式知, 在 Ω_R 的边界 $\partial B_R \cup \partial\Omega$ 上 u 都取不到最大值, 显然这与极值原理相矛盾。故调和函数 u 只能恒为零。这样唯一性得证。

类似的方法可以证明定解问题(3.26)的稳定性。证毕。 ■

习 题

1. 证明(3.13)式对于 P_0 在 Ω 外与 Γ 上的情形成立。
2. 若函数 $u(x, y)$ 是单位圆上的调和函数, 又它在单位圆周上的数值已知为 $u = \sin \theta$, 其中 θ 表示极角, 问函数 u 在原点之值等于多少?
3. 如果用Laplace方程表示平衡温度场中温度分布函数所满足的方程, 试阐明使Neumann内问题有解的条件 $\iint f dS = 0$ 的物理意义。
4. 证明Laplace方程的Dirichlet外问题解的稳定性。

5. 对于二阶偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0,$$

其中 a_{ij}, b_i, c ($i, j = 1, \dots, n$)均为常数, 假设矩阵 a_{ij} 是正定的, 即对任何实数 λ_i ($i = 1, \dots, n$), 成立

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq a \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \quad (a \text{ 为正的常数}),$$

则称它为椭圆型方程。又设 $c < 0$, 试证明该方程的解也成立极值原理。也就是说, 若 u 在 Ω 中满足方程, 在 $\Omega \cup \Gamma$ 连续, 则 u 不能在 Ω 的内部达到正的最大值或负的最小值。

6. 举例说明对于方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = 0 \quad (c > 0)$$

不成立极值原理。

§ 4. Green函数

本节我们介绍Green函数。Green函数在偏微分方程的研究中具有重要意义，特别是在求解椭圆型方程的定解问题时起到十分重要的作用。下面我们以求解三维Laplace方程的Dirichlet问题为例引入Green函数，介绍其基本性质，着重介绍求解Green函数的镜像法，然后利用Green函数给出Laplace方程Dirichlet问题解的表达式—Poisson公式，最后证明由Poisson公式给出的解的表达式确实满足相应的定解问题。

4.1 引进Green函数的动机及其基本性质

对于在区域 Ω 中调和、在 $\bar{\Omega}$ 上具有一阶连续偏导数的函数 u ，在上一节中我们导出了 u 的基本积分公式(3.12)，即

$$u(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left(u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{P_0 P}} \right) - \frac{1}{r_{P_0 P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right) dS_P, \quad (4.1)$$

其中点 $P_0 \triangleq (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ ， Γ 是 Ω 的边界。上式用函数 u 及其法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界 Γ 上的值将函数 u 在区域 Ω 内部的数值表示出来了，这自然使人们想到能否利用(4.1)式来求解Laplace方程的边值问题。但是遗憾的是，在公式(4.1)式中同时需要函数 u 本身以及其法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 Γ 上的值(通常我们不能同时给出 u 及 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界上的值，否则定解问题就不适定了)，因此我们不能直接利用公式(4.1)式来求解Laplace方程(3.7)的Dirichlet问题或Neumann问题。譬如对Laplace方程(3.7)的Dirichlet问题，即

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad (4.2)$$

$$u|_{\Gamma} = f, \quad (4.3)$$

u 在 Γ 上的值是给定的，但 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 Γ 上的值是不知道的(因为根据定理3.4知，定解问题(4.2)-(4.3)的解是唯一的，所以如果我们再任意给定 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 Γ 上的值将会使得问题不适定)。为了克服这个困难，我们想办法将公式(4.1)式中的 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 消去，Green函数正是为了消去 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 而引入的。

为此，考察这样一个函数 $g(P, P_0)$ ：它在区域 Ω 内关于变量 P 是调和的，在 Ω 的边界 Γ 上与函数 $(4\pi r_{P_0 P})^{-1}$ 取值相同，即

$$g(P, P_0)|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi r_{P_0 P}} \Big|_{\Gamma}. \quad (4.4)$$

由Green第二公式(3.5)知,

$$\iint_{\Gamma} \left(g \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g}{\partial n} \right) dS = 0.$$

将(4.1)式和上式相减可得

$$u(P_0) = \iint_{\Gamma} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (4.5)$$

其中

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r_{P_0 P}} - g(P, P_0). \quad (4.6)$$

函数 G 就称为Laplace方程(4.2)的Dirichlet问题的Green函数(有时也称Dirichlet问题的源函数)。由(4.4)式易知, $G = G(P, P_0)$ 在边界 Γ 上恒等于零, 因此如果Green函数 $G(P, P_0)$ 已经知道, 并且它在 $\bar{\Omega}$ 上具有一阶连续的偏导数, 那么由(4.5)知, 定解问题(4.2)-(4.3)的解可表示为

$$u(P_0) = - \iint_{\Gamma} \left(f \frac{\partial G}{\partial n} \right) (P) dS_P. \quad (4.7)$$

上面的讨论表明: 如果在区域 Ω 上的Green函数 $G = G(P, P_0)$ 存在, 并且在 $\bar{\Omega}$ 上具有一阶连续的偏导数, 那么定解问题(4.2)-(4.3)在 $\bar{\Omega}$ 上具有一阶连续偏导数的解可以表示为(4.7)的形式。但是, 在实际应用中, 由于事先并不知道Dirichlet问题在 $\bar{\Omega}$ 上具有一阶连续偏导数的解是否存在, 因此(4.7)式所给出的解只是问题的形式解, 它是否确实满足方程(4.2)以及边界条件(4.3), 还必须进行严格的数学验证。

上面讨论的这种将定解问题的解用Green函数或者其导数的积分来表示的方法称为Green函数法。但是, 要知道区域 Ω 上的Green函数, 我们必须求解Laplace方程(4.2)的一个特殊的Dirichlet问题:

$$\begin{cases} \Delta g = 0, \\ g|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi r_{P_0 P}} \Big|_{\Gamma}. \end{cases} \quad (4.8)$$

对于一般区域而言, 要证明这种特殊的Dirichlet问题解的存在性, 和证明在这区域上一一般的Dirichlet问题解的存在性通常具有同样的困难, 因此上式方法尚不能有效地用来解决一般区域上Laplace方程的Dirichlet问题。但是, 我们不能因此就否定Green函数法的意义, 因为: (i) Green函数仅依赖于区域, 而与边界条件无关。一旦求得了某个区域

上的Green函数，这个区域上的一切Dirichlet问题的解的存在性也就得到了解决，且其解可用积分式(4.7)表达出来；(ii) 对于某些特殊的区域，如球、半空间等，Green函数可以用初等方法求得，而这些特殊区域上的Dirichlet问题常常具有重要的作用；(iii) 公式(4.7)不仅对于问题的求解有意义，而且在已知Dirichlet问题解的存在性以后，还可以利用它对解的性质进行探讨。

在研究Green函数的存在性之前，我们先叙述Green函数的几个重要性质。

性质4.1 Green函数 $G(P, P_0)$ 除 $P = P_0$ 一点外处处满足Laplace方程(4.2)，而当 $P \rightarrow P_0$ 时， $G(P, P_0)$ 趋于无穷大，其阶数和 $\frac{1}{4\pi r_{P_0 P}}$ 相同。 $\square$

性质4.2 在边界 Γ 上Green函数 $G(P, P_0)$ 恒等于零。 $\square$

性质4.3 在区域 Ω 中成立着不等式：

$$0 < G(P, P_0) < \frac{1}{4\pi r_{P_0 P}}. \quad \square$$

性质4.4 Green函数 $G(P, P_0)$ 在自变量 P 及参变量 P_0 之间具有对称性，即设 P_1, P_2 为区域中的两点，则

$$G(P_1, P_2) = G(P_2, P_1). \quad \square$$

性质4.5 成立 $\iint_{\Gamma} \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial n} dS_P = -1$. $\square$

上述性质的证明，留给读者自己完成。

注记4.1 Green函数在静电学中有明显的物理意义。设在点 P_0 处放一单位点电荷，那么它在自由空间所产生的静电场的电势为 $\frac{1}{4\pi r_{P_0 P}}$ 。如果在 P_0 点的点电荷包围在一个封闭的导电面内，而这个导电面又是接地的，此时在导电面内的电势就可以用Green函数

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r_{P_0 P}} - g(P, P_0)$$

来表示，它在导电面上恒等于零，而函数 $-g(P, P_0)$ 正好表示导电面上感应电荷所产生的电势。因此，Green函数的性质4.4 在静电学上可表述为： P_1 处的单位点电荷在 P_2 处产生的电势等于 P_2 处单位点电荷在 P_1 处所产生的电势。这种性质在物理学中称为互易原理。 $\square$

4.2 镜像法

下面我们介绍Green函数的一种基本求法，称之为镜像法。求解区域 Ω 上的Green函数，可归结为求解函数 $g(P, P_0)$ ，当所考察的区域 Ω 的边界具有特殊的对称性时，可以用类似于求反射波的方法求得函数 g ，进而得到所要求的Green函数。

镜像法的思想可以由下述物理解释来加以阐明：

设区域 Ω 的内点 P_0 处有一个点电荷，并假设在区域 Ω 外某点 P_1 处也有一个点电荷。 P_0 处的点电荷产生一个电势， P_1 处的点电荷也产生一个电势。如果 P_0 处的点电荷所产生的电势正好是边界上与 P_1 处的点电荷所产生的电势相抵消，那么这个假设在点 P_1 处的点电荷在 Ω 内的电势就等于点 P_0 处的点电荷所产生的电势。自然可以想象，点 P_1 应该是点 P_0 关于边界 Γ 的某种意义下的对称点。

这种方法也称为静电源像法。下面我们用镜像法分别求球、半空间以及圆上的Green函数以及它们相应的Poisson公式。

一、球上的Green函数与Poisson公式

设 ∂B_R 是以原点 O 为球心，以 R 为半径的球面(见图4.1)。在点 $P_0 \triangleq (x_0, y_0, z_0)$ 处放置一单电荷，在半射线 OP_0 上取线段 OP_1 使得

$$r_0 r_1 = R^2, \quad (4.9)$$

其中 $r_0 = |OP_0|$, $r_1 = |OP_1|$. 通常称点 P_1 为 P_0 的关于球面 ∂B_R 的反演点。

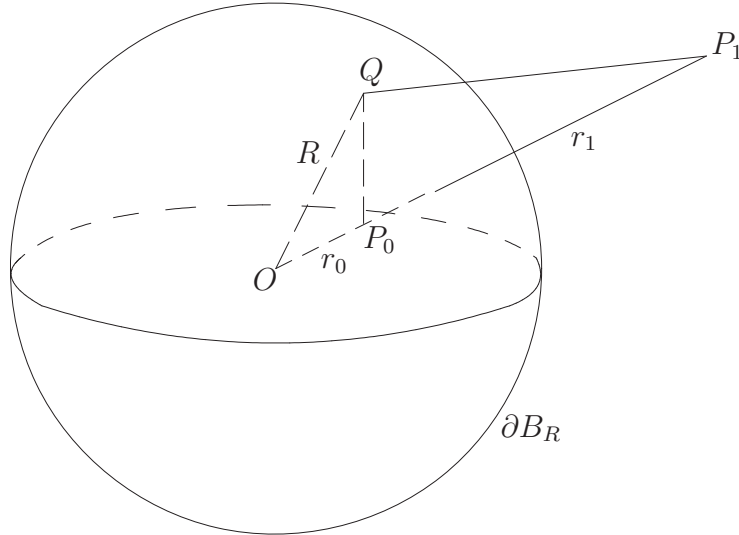


图 4.1： 点 P_0 以及其反演点 P_1

设 Q 是球面 ∂B_R 上的任意一点，考察三角形 OQP_0 及 OQP_1 ，它们在点 O 处有公共的夹角，并且此夹角的两条相应的边成下述比例

$$\frac{|OP_0|}{|OQ|} = \frac{|OQ|}{|OP_1|} \quad (\text{等价于 } r_0 r_1 = R^2, \text{ 即(4.9)式}),$$

于是, 三角形 OQP_0 与三角形 OQP_1 相似。由相似性可知, 对球面上任意给定的点 Q 成立

$$|QP_1| = \frac{R}{r_0}|P_0Q|. \quad (4.10)$$

假设在点 P_1 处有一个点电荷, 根据(4.10)式可知, 为了使它所产生的电势在球面上恰好与点 P_0 处的单位点电荷所产生的电势抵消, 必须假设在 P_1 处的点电荷带有电量为 $-\frac{R}{r_0}$, 于是,

$$g(P, P_0) = \frac{1}{4\pi} \times \frac{R}{r_0} \times \frac{1}{r_{P_1P}},$$

其中 $r_{P_1P} = |P_1P|$ 。因此, 以 ∂B_R 为球面的球上的Green函数是

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{P_0P}} - \frac{R}{r_0} \frac{1}{r_{P_1P}} \right). \quad (4.11)$$

下面我们利用Green函数(4.11)式来求解Laplace方程(4.2)在球面 ∂B_R 上满足边界条件

$$u|_{\partial B_R} = f \quad (4.12)$$

的Dirichlet问题的解。

根据公式(4.7), 我们需要计算 $\frac{\partial G}{\partial n}$ 在 ∂B_R 上的值。注意到

$$r_{P_0P} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos \eta}, \quad r_{P_1P} = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1r \cos \eta},$$

其中 $r = |OP|$, $\eta = \angle(OP_0, OP)$, 即线段 OP_0 与 OP 之间的夹角, 并利用(4.9)式, 由(4.11)式就得Green函数

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos \eta}} - \frac{R}{\sqrt{r_0^2 r^2 - 2R^2 r r_0 \cos \eta + R^4}} \right).$$

于是, 在 ∂B_R 上有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{r=R} &= \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{r - r_0 \cos \eta}{(r^2 + r_0^2 - 2r_0r \cos \eta)^{3/2}} - \frac{(r_0^2 r - R^2 r_0 \cos \eta)R}{(r_0^2 r^2 - 2R^2 r r_0 \cos \eta + R^4)^{3/2}} \right\} \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \eta)^{3/2}}. \end{aligned}$$

这样, 由(4.7)式可知, 在球 B_R 上的Dirichlet问题(4.2), (4.12)的解为

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial B_R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \eta)^{3/2}} f(P) dS_P. \quad (4.13)$$

上式的球坐标形式为

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R, \theta, \varphi) \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \eta)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (4.14)$$

其中 $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 表示点 P_0 的球坐标, (R, θ, φ) 是球面 ∂B_R 上的点 P 的坐标。又注意到向量 OP_0 与 OP 的方向余弦分别为

$$(\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0), \quad (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

所以,

$$\begin{aligned} \cos \eta &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) \\ &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

公式(4.13)或(4.14)通常称球上的Poisson公式。

二、半空间上的Green函数与Poisson公式

下面我们用镜像法求解半空间上的Dirichlet问题: 即要求一个在半空间 $z > 0$ 上的调和函数 $u = u(x, y, z)$ 使得它在平面 $z = 0$ 上取已给定的函数 $f(x, y)$

$$u|_{z=0} = f(x, y).$$

注意到点 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ 的关于平面 $z = 0$ 的对称点 $P_0^* : (x_0, y_0, -z_0)$ (这里 $z_0 > 0$), 易知, Green函数具有下述形式

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right]. \quad (4.15)$$

对于半空间 $z > 0$ 来说, 平面 $z = 0$ 的外法方向是与 z -轴相反的方向, 故有

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}.$$

除此之外, 对于半空间 $z > 0$, 如果对调和函数 u 在无穷远处加上条件

$$u(P) = O\left(\frac{1}{|OP|}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial n}(P) = O\left(\frac{1}{|OP|^2}\right) \quad (\text{当 } |OP| \rightarrow \infty),$$

其基本积分公式(3.12)式仍然成立(其证明类似于上一节的讨论, 此处略)。这样, 由Green函数表示的求解公式(4.7)式也成立。于是, 由公式(4.7)式可知, 半空间 $z > 0$ 上

的Laplace方程(4.2)的Dirichlet问题的解可表示为

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial z} (A_- - A_+) \right] \Big|_{z=0} dx dy \\ &= \frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} dx dy, \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中

$$A_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z \pm z_0)^2}}.$$

(4.16)式称为上半平面 $z > 0$ 上的Poisson公式。

三、圆上的Green函数与Poisson公式

现在我们讨论圆上二维Laplace方程的Dirichlet问题

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (4.17)$$

$$u|_{\partial\Omega} = f(\theta), \quad (4.18)$$

其中 $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 < R^2\}$ (这里 $R > 0$ 为常数), $\partial\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 = R^2\}$, θ 是极坐标的极角。

类似于求解球上的Green函数, 我们可以求出圆上的Green函数, 其中所不同的地方, 只是在二维情形时, 应将三维情形时的因子 $\frac{1}{4\pi r}$ 换成 $\frac{1}{2\pi} \ln r^{-1}$ (见第一节中的习题1)。此种情形下的Green函数为

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{r_{P_0 P}} - \ln \left(\frac{R}{r_0 r_{P_1 P}} \right) \right].$$

注意到

$$r_{P_0 P} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \eta}, \quad r_{P_1 P} = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos \eta},$$

其中 $\eta = \angle(OP_0, OP)$, 即线段 OP_0 与 OP 之间的夹角, 其余记号类似于球的情形, 见图4.2. 另一方面, 在平面情形, OP_0 及 OP 的方向余弦分别是 $(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ 和 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 所以

$$\cos \eta = \cos(\theta - \theta_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0.$$

利用关系式

$$r_1 r_0 = R^2$$

可知，在圆周 $r = R$ 上成立

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{r=R} &= \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R} \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \eta}} - \ln \frac{R}{\sqrt{r_0^2 r^2 - 2R^2 r r_0 \cos \eta + R^4}} \right) \right] \right\} \Big|_{r=R} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{r - r_0 \cos \eta}{r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos \eta} - \frac{r_0^2 r - R^2 r_0 \cos \eta}{r_0^2 r^2 - 2R^2 r r_0 \cos \eta + R^4} \right\} \Big|_{r=R} \\
&= -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2R r_0 \cos \eta + r_0^2}.
\end{aligned}$$

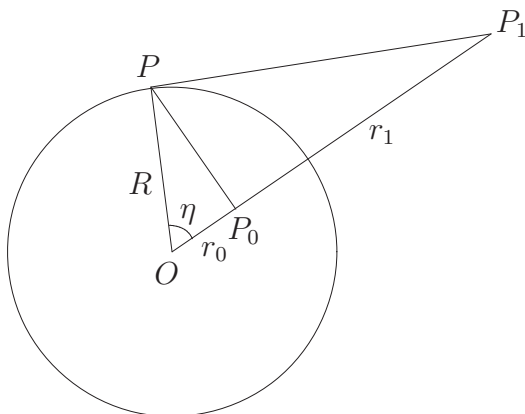


图 4.2: 点 P_0 以及其反演点 P_1

于是，由(4.7)式可知，圆上的Dirichlet问题(4.17)-(4.18)的解可表示为

$$\begin{aligned}
u(r_0, \theta_0) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2R r_0 \cos \eta + r_0^2} f(\theta) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r_0^2) f(\theta)}{R^2 - 2R r_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2} d\theta.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

上式称为圆上的Poisson公式。

4.3 解的验证

在上面的讨论中，我们用镜像法求出了在球、半空间和圆上的Laplace方程的Dirichlet问题解的表达式，即Poisson公式。但这些表达式究竟是否确实满足方程以及相应的边界条件，还需要严格的数学验证。这里仅以圆的情形进行验证，其它情形可类似，这里从略。

首先验证由(4.19)式给出的 u 的表达式满足方程(4.17)。

由Green函数 $G(P, P_0)$ 关于 P, P_0 的对称性可知, 当点 P 取圆周上的点时, $G(P, P_0)$ 在圆内关于 P_0 点也是调和的, 因此通过积分号下求导的方法易知, 由(4.19)式给出的导数 u 确实满足方程(4.17)。特别指出的是, 这里我们用到当 P_0 在圆内, P 在圆周上时, (4.19)式的积分核, 即 $-\frac{\partial G}{\partial n}$ 是无奇性的事实。

下面我们证明函数 u 满足边界条件(4.18), 即当 (r_0, θ_0) 趋于点 (R, θ) 时, 由(4.19)式定义的函数 $u(r_0, \theta_0)$ 趋向于函数 $f(\theta)$ 。

事实上, 在(4.19)式中引入新的积分变量 $\varphi = \theta - \theta_0$, 并注意到函数 $f(\theta)$ 以及 $\cos(\theta - \theta_0)$ 都是 θ 的周期函数且周期为 2π , 我们可以将(4.19)式改写为

$$u(r_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - r_0^2)f(\varphi + \theta_0)}{R^2 - 2Rr_0 \cos \varphi + r_0^2} d\varphi. \quad (4.20)$$

由Green函数的性质(见性质4.5)可知

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos \varphi + r_0^2} d\varphi = 1.$$

于是, 有

$$u(r_0, \theta_0) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos \varphi + r_0^2} [f(\varphi + \theta_0) - f(\theta)] d\varphi. \quad (4.21)$$

下面我们证明, 当 $r_0 \rightarrow R$, $\theta_0 \rightarrow \theta$ 时, 上式右端趋于零。

此时, 我们假设边界函数 $f(\theta)$ 是连续的。因此, 对任意给定的正数 ε , 存在正数 δ 使得当 $\varphi \in [-\delta, \delta]$ 且 θ 与 θ_0 充分靠近时, 成立

$$|f(\varphi + \theta_0) - f(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

下面我们把积分区间 $[-\pi, \pi]$ 分成三个部分

$$(-\pi, -\delta), \quad (-\delta, \delta), \quad (\delta, \pi),$$

同时将(4.21)式右端的被积函数在上述三部分上的积分分别记为 I_1, I_2, I_3 , 即

$$u(r_0, \theta_0) - f(\theta) = I_1 + I_2 + I_3,$$

于是,

$$|u(r_0, \theta_0) - f(\theta)| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3|.$$

情形I: I_1 和 I_3 的估计

注意到在区间 $(-\pi, -\delta)$ 上成立 $\cos \varphi \leq \cos \delta$, 于是有

$$\begin{aligned} R^2 - 2Rr_0 \cos \varphi + r_0^2 &\geq R^2 - 2Rr_0 \cos \delta + r_0^2 \\ &= (R - r_0)^2 + 2Rr_0(1 - \cos \delta) \\ &\geq 4Rr_0 \sin^2 \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

再注意到 f 的连续性, 有

$$|f(\varphi + \theta_0) - f(\theta)| \leq K_1,$$

其中 K_1 是一个正常数. 于是

$$\begin{aligned} |I_1| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos \varphi + r_0^2} [f(\varphi + \theta_0) - f(\theta)] d\varphi \right| \\ &\leq \frac{K_1(R^2 - r_0^2)(\pi - \delta)}{8\pi Rr_0 \sin^2 \frac{\delta}{2}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

对于 I_3 , 我们有类似的估计式

$$|I_3| \leq \frac{K_3(R^2 - r_0^2)(\pi - \delta)}{8\pi Rr_0 \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad (4.23)$$

其中 K_3 是一个正常数. 从估计式(4.22)和(4.23)中可以看出, 当 $r_0 \rightarrow R$ 时, I_1 和 I_3 均趋于零.

情形II: I_2 的估计

注意到

$$\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos \varphi + r_0^2} \geq 0,$$

于是,

$$\begin{aligned} |I_2| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta}^{\delta} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos \varphi + r_0^2} [f(\varphi + \theta_0) - f(\theta)] d\varphi \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos \varphi + r_0^2} d\varphi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos \varphi + r_0^2} d\varphi = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

利用 ε 的任意性可知, 当 $(r_0, \theta_0) \rightarrow (R, \theta)$ 时, $u(r_0, \theta_0)$ 趋于 $f(\theta)$, 即

$$u(r_0, \theta_0) \rightarrow f(\theta).$$

上面的讨论表明，由公式(4.19)式定义的函数 u 的确是圆上的Dirichlet问题(4.17)-(4.18)的解。

习 题

1. 证明Green函数的性质4.3及性质4.5.
2. 证明Green函数的对称性: $G(P_1, P_2) = G(P_2, P_1)$.
3. 利用Poisson公式求边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & (x^2 + y^2 + z^2 < 1), \\ u(r, \theta, \varphi)|_{r=1} = 3 \cos 2\theta + 1 & (r, \theta, \varphi \text{ 表示球坐标}) \end{cases}$$

的解。

4. 试求一函数 u ，使其在半径为 a 的圆的内部是调和的，而且在圆周 C 上取下列的值：

(1) $u|_C = A \cos \varphi$;

(2) $u|_C = A + B \sin \varphi$.

5. 试用镜像法导出二维Laplace方程在半平面上的Dirichlet问题：

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (y > 0),$$

$$u|_{y=0} = f(x)$$

的解。

§ 5. 调和函数(续)

在本章第三节中，我们介绍了调和函数及其一些基本性质，现在我们利用Poisson公式(4.13)来介绍调和函数的另外一些重要性质。

首先我们利用Poisson公式和极值原理研究调和函数在孤立奇点附近的性质。我们有

定理5.1 设 $u(P) = u(x, y, z)$ 在点 Q 的邻域中除去点 Q 外是调和的，且在 Q 点附近成立

$$\lim_{P \rightarrow Q} \{r_{PQ} u(P)\} = 0, \quad (5.1)$$

其中 $r_{PQ} = |PQ|$ 表示点 P 和点 Q 之间的距离。那么总可以重新定义函数 u 在 Q 处的值，使得 $u(P)$ 在整个所考察的点 Q 的邻域中(包括点 Q 本身)是调和函数。 $\square$

证明 为简单起见，不妨假设 Q 为坐标原点。

设 B_R 是一个以 Q 点为球心，以 R 为半径的球，并且它整个地包含在点 Q 的那个所考察的邻域中。我们构造一个球 B_R 上的Laplace方程的定解问题：在球 B_R 内满足Laplace方程，在球 B_R 的边界 ∂B_R 上取函数 u 的值为边界条件。显然，这样的定解问题的解可由Poisson公式给出，记之为 $\tilde{u}$ 。下面我们证明在整个球 B_R 内除去点 Q 外有 $u \equiv \tilde{u}$ 。于是，我们就可以重新定义函数 u 在点 Q 的值为函数 $\tilde{u}$ 在点 Q 处的值，这样就证明了定理。

记 $v = u - \tilde{u}$ 。函数 v 满足下面的性质：(i)在整个球 B_R 内除点 Q 外是调和函数；(ii)在点 Q 处，利用(5.1)知

$$\lim_{P \rightarrow Q} \{r_{PQ} v(P)\} = 0; \quad (5.2)$$

(iii)在 ∂B_R 上 v 恒等于零。

下面我们证明在 $B_R \setminus \{Q\}$ 上成立

$$v \equiv 0. \quad (5.3)$$

为此，构造函数

$$v_\varepsilon(P) = \varepsilon \left(\frac{1}{r_{QP}} - \frac{1}{R} \right), \quad (5.4)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是一个常数。函数 v_ε 具有如下的性质：(a)在 ∂B_R 上 $v_\varepsilon \equiv 0$ ；(b)在球面 ∂B_δ 和 ∂B_R 所围成的同心球壳 Ω 内是调和的(见图5.1)，这里 δ 是一个任意给定的小的正数， B_δ 表示以 Q 为球心，以 δ 为半径的球，其边界记为 ∂B_δ 。

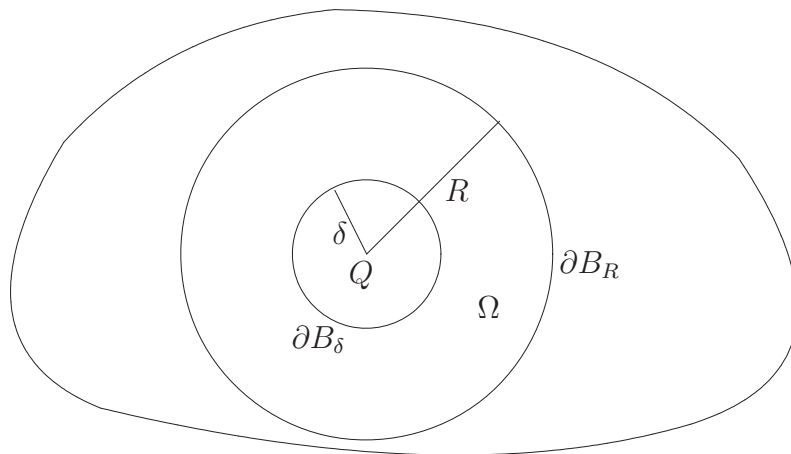


图 5.1: 球面 ∂B_R 和 ∂B_δ 所围成的同心球壳 Ω

对任意给定的正数 ε , 注意(5.2)式, 存在一个适当小的 $\delta > 0$ 使得在球面 ∂B_δ 上成立

$$|v| \leq v_\varepsilon,$$

而在 ∂B_R 上,

$$v = v_\varepsilon \equiv 0.$$

于是, 利用极值原理(见定理3.3), 对球壳 Ω 内的任意的点 P 均成立

$$|v(P)| \leq v_\varepsilon(P). \quad (5.5)$$

固定点 P , 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 上式的右端趋于零, 故其左端等于零, 即 $v(P) = 0$. 由点 $P \in \Omega$ 的任意性可知, 在 Ω 中有 $v \equiv 0$. 再注意到 $\delta > 0$ 的任意性易知, 在 $B_R \setminus \{Q\}$ 上成立(5.3)式。

定理证毕。 ■

下面我们利用Poisson公式证明调和函数关于它的所有自变量都是解析的。

定理5.2 设函数 $u(P_0)$ 是区域 Ω 中的调和函数, 那么它在 Ω 中是关于所有变量 x_0, y_0, z_0 的解析函数。 □

证明 只需证明在 Ω 中的任意一点 $P_0^* : (x_0^*, y_0^*, z_0^*)$ 的附近, 函数 u 都可以展开成 $x_0 - x_0^*, y_0 - y_0^*, z_0 - z_0^*$ 的幂级数即可。

对于 Ω 中任给一点 P_0^* , 以 P_0^* 为球心作一个球 B , 使它全部落在 Ω 中, 即 $B \subseteq \Omega$, 设它的半径为 R . 由于 $u(P_0)$ 在 Ω 中是调和的, 函数 u 在球 B 内的值可以利用Poisson公式由 u 在

球面 ∂B 上的值给出

$$\begin{aligned} u(P_0) &= \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial B} u(P) \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \eta)^{3/2}} dS_P \\ &= \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial B} u(P) \frac{R^2 - r_0^2}{r_{P_0 P}^3} dS_P. \end{aligned} \quad (5.6)$$

不妨设 P_0^* 就是坐标原点，下面我们证明 $u(P_0)$ 在 $P_0^* : (0, 0, 0)$ 附近可展开成 x_0, y_0, z_0 的幂级数。

事实上，由于在 B 上

$$\begin{aligned} & (R^2 - r_0^2) r_{P_0 P}^{-3} \\ &= [R^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)] [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-3/2} \\ &= [R^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)] [x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx_0 + yy_0 + zz_0) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2]^{-3/2} \\ &= [R^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)] \left\{ R^2 \left[1 - \frac{2(xx_0 + yy_0 + zz_0) - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{R^2} \right] \right\}^{-3/2}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

利用二项式定理可以将上式右端展开为 x_0, y_0, z_0 的幂级数。当 (x, y, z) 在球面 ∂B 上，而 (x_0, y_0, z_0) 在原点附近时这幂级数是一致收敛的，因此可以逐项求积分，而且积分后仍得到一个关于 x_0, y_0, z_0 为一致收敛的幂级数，因此 $u(P_0)$ 在 $P_0 = P_0^*$ 处是解析的。由点 P_0^* 的任意性知道 $u(P_0)$ 在 Ω 内处处解析。定理证毕。 ■

定理5.1和定理5.2分别称为调和函数的可去奇点定理和解析性定理。

下面我们利用Poisson公式来讨论调和函数的另外一些性质，这些性质由下述三个定理给出。

定理5.3 假设函数序列 $\{u_k\}$ 中的每个函数均在某一有限区域 Ω 中是调和的，在区域 Ω 的闭包 $\bar{\Omega}$ 上连续，并且该函数序列在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上一致收敛，则函数序列 $\{u_k\}$ 在 Ω 中也一致收敛，并且极限函数 u 在区域 Ω 中也是调和函数。 □

证明 记

$$f_k = u_k|_{\partial\Omega}. \quad (5.8)$$

根据假设， f_k 是边界 $\partial\Omega$ 上的连续函数，且函数序列 $\{f_k\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛，于是对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n, m > N$ 时，在 $\partial\Omega$ 上处处成立 $|f_n - f_m| \leq \varepsilon$ 。由极值原理可知，对于这些 n, m ，在 Ω 中的任意一点上均成立 $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$ 。因此，由Cauchy判别法可知，函数序列 $\{u_k\}$ 在 Ω 中是一致收敛的，记其极限函数为 u 。

下面我们证明序列 $\{u_k\}$ 的极限函数 u 在 Ω 中是调和的。为此，我们只需证明 u 在 Ω 中的每一个点的邻域内是调和函数即可。

在 Ω 中任取一点 P_0 , 以 P_0 为中心作一个完全落在 Ω 内的球 B . 在球 B 上, 每一个调和函数 u_k 均可以用Poisson公式(4.14)式表示出来, 即

$$u_k(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(R, \theta, \varphi) \times \frac{(R^2 - r_0^2) \sin \theta}{\{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0[\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]\}^{3/2}} d\theta d\varphi, \quad (5.9)$$

其中 R 是球 B 的半径, $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 是点 P_0 的球坐标. 因为函数序列 $\{u_k(R, \theta, \varphi)\}$ 一致收敛于 u , 所以在(5.9)式的两端令 $k \rightarrow \infty$ 便得到

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta, \varphi) \times \frac{(R^2 - r_0^2) \sin \theta}{\{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0[\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]\}^{3/2}} d\theta d\varphi. \quad (5.10)$$

上式表明极限函数 u 仍可以用Poisson公式表示出来, 从而 u 是球 B 内的调和函数. 定理获证. $\blacksquare$

定理5.3通常称为Harnack第一定理, 或称为调和函数序列的一致收敛性定理.

定理5.4 设 $\{u_k\}$ 是 Ω 上的一个单调不减的调和函数序列. 如果它在 Ω 内的某一点 P 处收敛, 那么它在 Ω 中处处收敛于一个调和函数 u , 而且这种收敛在 Ω 内的任一闭子区域上是一致收敛的. $\square$

证明 以 P 为球心、以 R 为半径做一个完全落在 Ω 中的球 B_R . 设 Q 是 B_R 内的任一点, 对 B_R 上的任意调和函数 u , 由Poisson公式(4.13)知成立

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial B_R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \eta)^{3/2}} u(M) dS_M.$$

如果 $u \geq 0$, 那么就可以利用 u 在球心 P 的值来估计 $u(Q)$ 的值. 事实上, 注意到

$$\frac{R^2 - r_0^2}{(R + r_0)^3} \leq \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \eta)^{3/2}} \leq \frac{R^2 - r_0^2}{(R - r_0)^3},$$

我们有

$$\frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial B_R} u(M) dS_M \times \frac{R - r_0}{(R + r_0)^2} \leq u(Q) \leq \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial B_R} u(M) dS_M \times \frac{R + r_0}{(R - r_0)^2}.$$

利用调和函数的平均值公式, 上式可改写为

$$\frac{R - r_0}{(R + r_0)^2} R \times u(P) \leq u(Q) \leq \frac{R + r_0}{(R - r_0)^2} R \times u(P). \quad (5.11)$$

现对于给定的调和函数序列 $\{u_k\}$, 令

$$v_k = u_k - u_{k-1} \geq 0 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

对 v_k 用(5.11)式便得到

$$\frac{R - r_0}{(R + r_0)^2} R \times v_k(P) \leq v_k(Q) \leq \frac{R + r_0}{(R - r_0)^2} R \times v_k(P). \quad (5.12)$$

对任意的 m 和 n ($n > m$), 有 $u_n - u_m = \sum_{k=m+1}^n v_k$. 注意到 $\{u_k(P)\}$ 的收敛性, 由(5.12)式易知 $|u_k(Q)|$ 在 $B_{\frac{R}{2}}$ 上一致收敛. 由定理5.3可知, $\{u_k(Q)\}$ 在 $B_{\frac{R}{2}}$ 上一致收敛于一个调和函数 $u(Q)$.

对任一点 $M \in \Omega$, 可以用完全落在 Ω 中的折线 l 连接 P 和 M , 而 l 可以用有限个完全落在 Ω 中的球覆盖. 对这些球逐一运用上述推理, 便得到 $\{u_k\}$ 在 M 点收敛, 从而 $\{u_k\}$ 在 Ω 内处处收敛于调和函数 u .

设 D 是 Ω 中的任一有界闭集, 由有限覆盖定理可知, 存在有限个完全落在 Ω 中的闭球 B_i ($i = 1, 2, \dots, m$)覆盖 D , 即 $D \subseteq \cup_{i=1}^m B_i$. 因为 $\{u_k\}$ 在 Ω 中处处收敛, 特别地在每个闭球 B_i 的球心 P_i 处收敛, 从而 $\{u_k\}$ 在 B_i ($i = 1, 2, \dots, m$)上一致收敛, 于是在 D 上也一致收敛. 定理获证. ■

定理5.4称为Harnack第二定理, 而(5.11)式称为Harnack不等式.

定理5.5 设 u 为区域 Ω 中的非负调和函数, 则对 Ω 中的任一闭子区域 $\bar{D}$, 存在仅与 D 有关的正常数 C , 使得

$$\max_{\bar{D}} \{u\} \leq C \min_{\bar{D}} \{u\}. \quad \square \quad (5.13)$$

证明 记 $\bar{D}$ 与 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的距离为 r . 由有限覆盖定理, $\bar{D}$ 可由 m 个半径为 $\frac{r}{2}$ 的球覆盖. 对 $0 \leq r_0 \leq \frac{r}{2}$, 成立

$$\frac{(r - r_0)r}{(r + r_0)^2} \geq \frac{2}{9}, \quad \frac{(r + r_0)r}{(r - r_0)^2} \leq 6. \quad (5.14)$$

于是, 由(5.11)式可知, 对任一用于覆盖 $\bar{D}$ 的半径为 $\frac{r}{2}$ 的球中的任意两点 P_1, P_2 , 成立

$$\frac{2}{9}u(P_1) \leq 6u(P_2),$$

即

$$u(P_1) \leq 27u(P_2). \quad (5.15)$$

由于 u 在 $\bar{D}$ 上的极大点与极小点必分别落在某个半径为 $\frac{r}{2}$ 的覆盖球中, 取 $C = (27)^m$, 便得所要证的(5.13)式。定理获证。 ■

习 题

1. 证明二维调和函数的奇点可去性定理: 如果 Q 是调和函数 $u(P)$ 的孤立奇点, 并且在点 Q 的一个邻域内成立

$$u(P) = o\left(\ln \frac{1}{r_{PQ}}\right),$$

那么, 此时可以重新定义函数 $u(P)$ 在点 Q 处的值使得它在 Q 点处也是调和的。

2. 如果三维调和函数 $u(P)$ 在奇点 Q 处附近能表示为 $\frac{h}{r_{QP}^\alpha}$, 其中 $\alpha \in (0, 1]$ 是常数, 而 h 是不为零的光滑函数, 试证明当 $P \rightarrow Q$ 时, 函数 u 趋于无穷大的阶数必与 $\frac{1}{r_{QP}}$ 同阶, 即 $\alpha = 1$.

§ 6. 强极值原理

Laplace方程描述的是稳态平衡的物理现象，它的一个重要特性就是成立极值原理。譬如，对于稳定状态的热传导现象，利用极值原理可知，温度的最高点和最低点必在介质的边界上取到。对在边界上的温度最低点，介质其它各点的热量一定流向它，并且通过它流向物体的外部，因此在该点处应该成立 $\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0$ ，其中 $\vec{n}$ 是单位外法向量。对温度最高点，有类似地讨论。事实上，我们有下一小节中所讨论的更强的结论。

6.1 强极值原理

在本小节中我们证明调和函数的强极值原理。

定理6.1 (强极值原理) 设 B_R 是一个以 R 为半径的闭球， $u = u(x, y, z)$ 是定义在 B_R 上的一个连续函数，它在 B_R 的内部是调和的，并且对此球的所有内点 (x, y, z) 成立

$$u(x, y, z) > u(x_0, y_0, z_0), \quad (6.1)$$

其中 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ 是球面 ∂B_R 上的一点。如果函数 $u(x, y, z)$ 在点 P_0 沿着方向 $\vec{\gamma}$ 的方向导数存在，并且 $\vec{\gamma}$ 和球面在点 P_0 处的内法向量成锐角，则在点 P_0 处成立

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} > 0. \quad (6.2)$$

证明 因为调和函数对坐标的平移变换保持不变，因此，我们不妨假设 B_R 的球心在坐标原点。又注意到调和函数 u 在点 P_0 处取最小值，故在点 P_0 处有 $\frac{\partial u}{\partial \gamma} \geq 0$ 。我们只需证明上式中的等号不能成立。

构造函数

$$v(x, y, z) = \exp\{-a(x^2 + y^2 + z^2)\} - \exp\{-aR^2\}, \quad (6.3)$$

其中 a 是一个给定的正常数。显然，有

- (i) 在球面 ∂B_R ，即 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上成立 $v \equiv 0$ ；
- (ii) 在同心球面所围成的闭区域

$$\Omega \triangleq \left\{ (x, y, z) \mid \frac{R^2}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

内 v 具有二阶连续偏导数，并且当 a 适当大时成立 $\Delta v > 0$ 。

事实上，通过直接计算我们有

$$\Delta v = [-6a + 4a^2(x^2 + y^2 + z^2)] \exp\{-a(x^2 + y^2 + z^2)\}.$$

又注意到在区域 Ω 上有

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{4}R^2,$$

于是, 存在适当的 a (譬如 $a > 6/R^2$)使得的 Ω 内成立 $\Delta v > 0$.

此外, v 还满足

(iii) 函数 v 沿球的半径方向的导数 $\frac{dv}{dr}$ 存在, 并且当 $r > 0$ 时成立 $\frac{dv}{dr} < 0$, 进而在球面 $\partial B_R: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上的点 P_0 处成立

$$\frac{\partial v}{\partial \gamma} = \frac{dv}{dr} \cos \angle(\vec{\gamma}, \vec{r}) > 0. \quad (6.4)$$

定义函数

$$w(x, y, z) = u(x, y, z) - \varepsilon v(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0). \quad (6.5)$$

当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 我们断言

$$w(x, y, z) \geq 0, \quad \forall (x, y, z) \in \Omega. \quad (6.6)$$

事实上, 一方面注意到在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{R^2}{4}$ 上, 由于 $u(x, y, z) > u(x_0, y_0, z_0)$, 所以只需取 $\varepsilon > 0$ 充分小就可使得函数 w 在该球面上成立 $w > 0$; 另一方面, 显然在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上有 $w > 0$.再注意到在区域 Ω 内

$$\Delta w = -\varepsilon \Delta v < 0,$$

故函数 w 在 Ω 内不可能取到最小值。又因为在 Ω 的边界 $\partial\Omega = \partial B_R \cup \partial B_{\frac{R}{2}}$ 上恒有 $w \geq 0$, 所以(6.6)式成立。

注意到(6.5)式和(6.6)式, 我们有

$$w(x, y, z) \geq 0 = w(x_0, y_0, z_0), \quad \forall (x, y, z) \in \Omega.$$

于是, 在点 P_0 处成立

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma} \geq 0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \gamma} \geq 0.$$

再注意到(6.4)式, 可知

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} \geq \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \gamma} > 0.$$

上式即为所要证明的(6.2)式。定理获证。 ■

利用上式强极值原理，我们有

定理6.2 设区域 Ω 具有下述性质：对 Ω 的边界 Γ 上的任意一点 P 均可做一个属于 Ω 的闭包 $\bar{\Omega}$ 的球 B_P 、并且使得该球在点 P 处与 Γ 相切。假设不恒等于常数的调和函数 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续，且在边界点 $P_0 \in \Gamma$ 处取得最小(最大)值，进一步假设该调和函数在点 P_0 处关于 Ω 的外法向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 存在，那么 $\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{P_0}$ 必是负(正)值。 □

证明 由假设可知，我们可以做一个小球记为 B_{P_0} 使得它满足其所有的内点都属于 Ω ，并且在点 P_0 处与边界 Γ 相切。由于调和函数 $u(x, y, z)$ 不恒为常数，根据极值原理可知，其最小值不可能在 Ω 的内点取到，因此 u 在 B_{P_0} 的所有内点上的值恒大于 u 在点 P_0 处的值。于是，由定理6.1知， $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在点 P_0 处的值必是负的。

下面我们证明最大值的情形。

注意到在边界 Γ 上使得函数 u 取得最大值的那些点处，函数 $-u$ 取得最小值，因此在这些点处有 $\frac{\partial(-u)}{\partial n} < 0$ ，即 $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ 。定理获证。 ■

6.2 应用：Laplace方程第二边值问题解的唯一性

下面我们利用上一小节所证明的强极值原理来讨论Laplace方程的第二边值问题解的唯一性。

考虑Laplace方程的Neumann内问题

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = g. \end{cases} \quad (6.7)$$

容易看出，如果定解问题(6.7)的解存在，那么必定不唯一。事实上，如果 u 是问题(6.7)的解，则 $u + c$ (其中 c 是任一常数)也是问题(6.7)的解。但是，我们可以证明下述“唯一性”定理。

定理6.3 假设区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 满足定理6.2中的条件，那么定解问题(6.7)的解彼此只能相差一个常数。换句话说，Laplace方程的Neumann内问题的解不计相差一个常数外是唯一的。 □

证明 设 u_1 和 u_2 均是定解问题(6.7)的解。令 $u = u_1 - u_2$ ，则 u 在 Ω 内是调和函数，在 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 上连续且 $\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0$ 。假设函数 u 不恒等于常数，则由极值原理知，其极小

值必在 $\partial\Omega$ 上的某一点(记为 P_0)处达到, 再由定理6.2可知, 在 u 的最小值的点 P_0 处成立

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{P_0} < 0.$$

这与 $\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0$ 相矛盾。因此, u 必定是一个常数。定理获证。 ■

下面我们讨论Laplace方程的Neumann外问题。

设区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 并且满足下述性质: 在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的任意一点 P 处均可作一个完全落在 Ω 外(即 $\Omega^c = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$)且与边界 $\partial\Omega$ 相切的球 B_P (见图6.1)。我们在 Ω^c 上考虑下述定解问题:

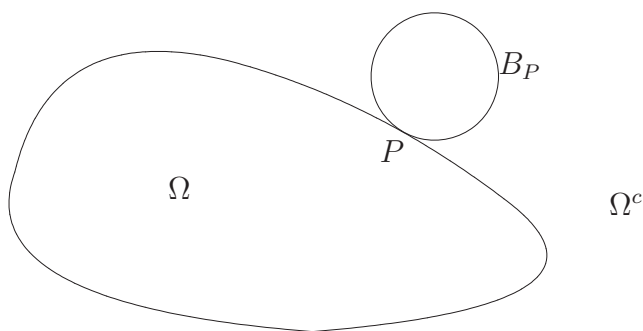


图 6.1. 区域 Ω 与 Ω 的外部区域 Ω^c .

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = g, & u \rightarrow 0 \text{ (当 } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty \text{ 时)}, \end{cases} \quad (6.8)$$

其中 ν 表示区域 Ω^c 的单位外法向量, 而 g 是定义在 $\partial\Omega$ 上的连续函数。则我们有

定理6.4 定解问题(6.8)的解如果存在, 则必是唯一的。 □

证明 假设定解问题(6.8)有两个解, 分别为 u_1 和 u_2 . 令 $u = u_1 - u_2$, 则在 $\partial\Omega$ 上有

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.9)$$

并且 u 在 Ω^c 内是调和函数, 在 $\Omega^c \cup \partial\Omega$ 上连续且当 $r \rightarrow \infty$ 时, u 趋于零。下面我们证明 $u \equiv 0$. 注意到 u 在无穷点处的极限为零, 因此对于任意给定的常数 $\varepsilon > 0$, 存在充分大的 R 使得以坐标原点为球心, 以 R 为半径的球面 ∂B_R 上的每一点 P 均有

$$|u(P)| \leq \varepsilon. \quad (6.10)$$

由 $\partial\Omega$ 和 ∂B_R 所围成的区域记为 Ω_R . 在 Ω_R 上考察调和函数 u . 由极值原理, 显然 u 不可能在 Ω_R 的内部取得极值. 再由定理6.2知, u 也不能在 $\partial\Omega$ 上取到极值. 因此, u 只能在边界 ∂B_R 上取得极值. 由(6.10)式易知, 在 Ω_R 上的任意一点均成立 $|u| \leq \varepsilon$. 由 ε 的任意性可知, 在整个 Ω^c 上有 $u \equiv 0$. 定理获证. ■

注记6.1 我们用极值原理和强极值原理分别证明了Laplace方程第一边值问题和第二边值问题的解的唯一性. 如果仅局限于讨论 $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 中的调和函数, 可以利用能量积分方法更简洁地证明这两类边值问题的解的唯一性. □

事实上, 在有界区域 Ω 上的Poisson方程的第一或第二边值问题的解的唯一性可以归结为讨论 Ω 中的调和函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 在边界 $\partial\Omega$ 上分别满足 $u = 0$ 或 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 时的性态. 我们知道, 对调和函数 u , 能量积分为

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial u}{\partial z} \right) - u \Delta u \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

由于 u 为调和函数, 并利用Green公式可得

$$E(u) = \frac{1}{2} \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

在讨论第一边值问题解的唯一性时, 成立 $u|_{\partial\Omega} = 0$; 在讨论第二边值问题解的唯一性时, 成立 $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$. 因此, 总有

$$E(u) = 0,$$

从而, 在 Ω 中成立

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

即

$$u \equiv \text{常数}. \quad (6.11)$$

对于第一边值问题, 由于在边界 $\partial\Omega$ 上成立 $u = 0$, 因此只能成立

$$u \equiv 0,$$

这就证明了Poisson方程第一边值问题的 $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 解是唯一的.

对于第二边值问题, (6.11)式意味着满足同一Poisson方程第二边值问题的解最多只能相差一个常数, 即在允许相差一个任意常数的意义下, 解是唯一的.

习 题

1. 试用强极值原理来证明极值原理。
2. 利用极值原理及强极值原理证明：当区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 满足定理6.2中的条件时，调和方程第三边值问题

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial\Omega} = f \quad (\sigma > 0)$$

的解的唯一性。

3. 说明在证明强极值原理过程中，不可能作出一个满足条件(i)和(iii)的辅助函数 $v(x, y, z)$ ，使它在整个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 内满足 $\Delta v > 0$.