

### § 3. 高维波动方程的Cauchy问题

从本节起我们将研究高维空间中的波动方程。在本节中我们首先给出 $n$ 维空间中的波动方程并着重推导出二维膜振动方程，然后介绍波动方程的定解条件的提法。本节的重点是介绍求解三维空间中波动方程的Cauchy问题的球平均法，在此基础上我们还将介绍Hadamard 的降维法并利用该方法求解二维空间中波动方程的Cauchy问题。

#### 3.1 高维空间中的波动方程

关于 $n$ 个空间变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 以及时间 $t$ 的函数 $u = u(t, x) = u(t, x_1, \dots, x_n)$ 的波动方程是

$$\square u = u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad (3.1)$$

其中 $c$ 是正常数。由(3.1)定义的算子

$$\square u = u_{tt} - c^2 \Delta u = u_{tt} - c^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \quad (3.2)$$

称为D'Alembert算子或波算子。

当 $n = 1$ 时，(3.1)式可以描述管道中的声波或弦的振动；当 $n = 2$ 时，方程(3.1)可用来描述水面波或薄膜的微小振动；当 $n = 3$ 时，这个方程描述了声波或光波的传播。

由于考虑到建模的重要性，下面我们以膜振动为例介绍二维膜振动方程的建立。

这里介绍的膜是指弹性固体薄片，我们做以下假设：

- (H<sub>1</sub>) 膜是均匀的，它的面密度为常数 $\rho$ (不妨设 $\rho \equiv 1$ )；
- (H<sub>2</sub>) 膜的厚度很小，可视为一张曲面；
- (H<sub>3</sub>) 膜的平衡位置处于一个平面内，膜上各点在垂直该平面的方向上做微小振动；
- (H<sub>4</sub>) 膜所受的外力 $F$ 与平衡位置所在的平面垂直；
- (H<sub>5</sub>) 膜是柔软的，它因弯曲而发生的形变不会产生任何抵抗力。

设膜的平衡位置所处的平面为 $ox_1x_2$ ，以 $u(t, x_1, x_2)$ 记膜上的点 $(x_1, x_2)$ 处在时刻 $t$ 的位移。对于一个紧张着的薄膜，若它满足上面的基本假设，则在薄膜上任一点的张力 $\mathbf{T}$ 是常值。这时，若过薄膜上指定点 $P$ 沿某一方向作一个截口 $l$ ，则该薄膜位于 $l$ 两侧的部分分别对于对方有单位强度为 $T$ 的拉力，拉力的方向与曲面法向垂直，又与 $l$ 方向相垂直。

为了推导膜振动方程，在膜上任取一小块 $\Sigma$ ，它在 $ox_1x_2$ 平面上的投影为 $\Omega$ (见图3.1)。以下来计算在时间段 $(t, t + \Delta t)$ 内作用于膜块 $\Sigma$ 的冲量以及该时间段内这一小块膜的动量变化。

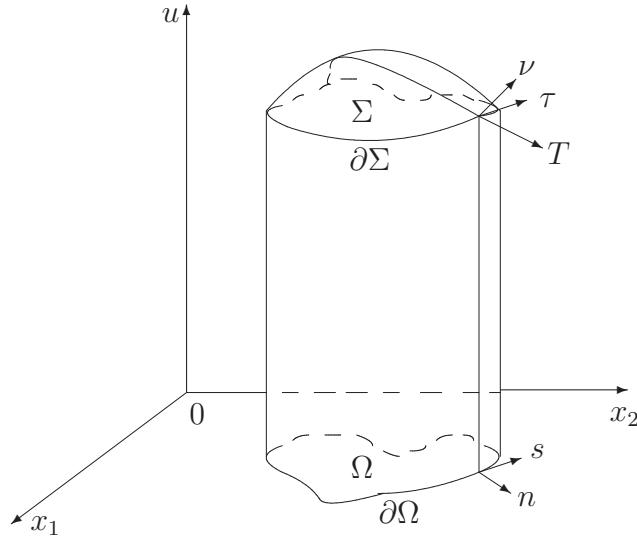


图 3.1: 振动膜

先考察作用在 $\Sigma$ 的边界 $\partial\Sigma$ 上的张力。设 $\partial\Sigma$ 在 $ox_1x_2$ 平面的投影为 $\partial\Omega$ 。以 $\tau$ 表示曲线 $\partial\Sigma$ 的切线方向,  $\nu$ 表示 $\Sigma$ 的法线方向,  $s$ 表示曲线 $\partial\Omega$ 的切线方向,  $n$ 表示平面上 $\partial\Omega$ 的法线方向。因此张力 $\mathbf{T}$ 的方向与 $\tau \times \nu$ 的方向一致。膜的位移用 $u(t, x_1, x_2)$ 表示,  $\Sigma$  的方程为 $u = u(t, x_1, x_2)$ , 曲面法线 $\nu$ 的方向可以取为 $(-u_{x_1}, -u_{x_2}, 1)$ 。

现在考察方向 $\tau$ , 因 $s$ 的方向为

$$(\cos(x_1, s), \cos(x_2, s), 0),$$

故 $\tau$ 的方向可以取为

$$(\cos(x_1, s), \cos(x_2, s), \frac{\partial u}{\partial s}).$$

所以 $\tau \times \nu$ 的方向可取为 $(a_1, a_2, a_3)$ , 其中

$$\alpha_1 = \cos(x_2, s) + \frac{\partial u}{\partial s} u_{x_2},$$

$$\alpha_2 = -\cos(x_1, s) - \frac{\partial u}{\partial s} u_{x_1},$$

$$\alpha_3 = u_{x_1} \cos(x_2, s) - u_{x_2} \cos(x_1, s) = u_{x_1} \cos(x_1, n) + u_{x_2} \cos(x_2, n) = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

由此可知, 张力 $\mathbf{T}$ 在垂直方向的分量是

$$\mathbf{T}_u = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \mathbf{T}.$$

由于 $u_{x_1}, u_{x_2}$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial s}$ 都是小量, 故 $\mathbf{T}_u \approx T \frac{\partial u}{\partial n}$ .

根据以上的分析知，沿着曲线 $\partial\Sigma$ ，张力的合力为

$$\int_{\partial\Omega} T \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

而在面积 $\Sigma$ 上膜所受外力 $F$ 的合力为

$$\iint_{\Omega} F(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

所以在时间段 $(t, t + \Delta t)$ 内作用于 $\Sigma$ 的冲量为

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{\partial\Omega} T \frac{\partial u}{\partial n} ds + \iint_{\Omega} F(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] dt. \quad (3.3)$$

又在这个时间段内膜块 $\Sigma$ 的动量变化为

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(t + \Delta t, x_1, x_2) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, x_2) \right] dx_1 dx_2. \quad (3.4)$$

因此得到

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{\partial\Omega} T \frac{\partial u}{\partial n} ds + \iint_{\Omega} F(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] dt \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(t + \Delta t, x_1, x_2) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, x_2) \right] dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

假设 $u$ 关于 $x_1, x_2$ 的二阶偏导数都连续，利用Green公式可得

$$\int_t^{t+\Delta t} \iint_{\Omega} \left\{ T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F(t, x_1, x_2) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} dx_1 dx_2 dt = 0.$$

由于时间区间段与空间区域 $\Omega$ 的任意性，由上式就得到膜振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F(t, x_1, x_2).$$

记 $T = c^2$ ,  $f = F$ , 就得到膜振动方程的标准形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f, \quad (3.5)$$

其中 $f$ 称为方程的自由项。受外力 $F$ 的振动称为强迫振动。因此这样的方程也称为膜的强迫振动方程。当 $f = 0$ 时，方程是齐次的，此时的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad (3.6)$$

称为膜的自由振动方程。方程(3.5)及(3.6)也称为二维波动方程。

### 3.2 定解条件

$n$ 维空间中的波动方程(3.1)的定解条件同样有边界条件和初始条件两种。

和弦振动的情形一样，在初始条件的提法中单有初始位移 $u(0, x)$ 是不够的。这是因为，以膜振动为例，两个相同的膜，如果它们的初始位移相同，但一个有初始速度，而另一个在初始时是静止的，那么它们的运动情形也不会一样。因此初始条件的提法通常为

$$\begin{cases} u(0, x) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \end{cases} \quad (3.7)$$

其中 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为已知函数。

类似于弦振动方程的情形，对于 $n$ 维空间中的波动方程的边界条件的提法，通常也有三种：

**第一类边界条件** 边界固定或依照一已知函数随时间而变化。此时边界条件的提法为

$$u(t, x)|_{\partial\Omega} = 0$$

或

$$u(t, x)|_{\partial\Omega} = \mu(t, x), \quad (3.8)$$

其中 $\Omega$ 为自变量 $x$ 的定义域， $\partial\Omega$ 为其边界， $\mu(t, x)$ 为已知函数。这种边界条件称为第一类边界条件。

**第二类边界条件** 边界可以在柱面上自由滑动，不受到摩擦力的作用。此时边界条件的提法为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.9)$$

或更一般地为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \mu(t, x), \quad (3.10)$$

其中 $\mu(t, x)$ 为已知函数。这种边界条件称为第二类边界条件。

**第三类边界条件** 边界固定在弹性支承上，此时，边界条件归结为

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.11)$$

其中 $\sigma$ 为已知正数。也可以考虑更普遍的边界条件

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \right|_{\partial\Omega} = \mu(t, x), \quad (3.12)$$

其中 $\mu(t, x)$ 为已知函数。这种边界条件称为第三类边界条件。

对于波动方程(3.1)，同样可以提Cauchy问题，此时所给的初始条件为

$$\begin{cases} u(0, x) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.13)$$

### 3.3 球平均法

本小节我们考察高维波动方程Cauchy问题的求解。着重介绍Poisson的球平均法，该方法是受下面的事实启发而总结出来的。

考察三维波动方程的Cauchy问题

$$u_{tt} - c^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) = 0, \quad (3.14)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x). \quad (3.15)$$

假设初始条件 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 具有球对称性，即此时 $\varphi$ 和 $\psi$ 仅为变量 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ 的函数。这样我们便可寻求只依赖于 $t$ 和 $r$ 的解 $u = u(t, r)$ 。此时方程(3.14)可写成

$$u_{tt} = c^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r). \quad (3.16)$$

令 $v = ru$ ，于是(3.16)可化为

$$v_{tt} = c^2v_{rr}. \quad (3.17)$$

利用一维波动方程的D'Alembert公式便可以求出 $v$ ，进而可得到Cauchy问题(3.14)-(3.15)的球对称形式的解。

球平均法是受上面事实启发而得出的。它的核心思想是利用球平均函数技巧将原来高维波动方程的Cauchy问题化为一个一维波动方程相应的Cauchy问题，利用一维情形的知识求出相应的解，进而得到原高维波动方程的Cauchy问题的解。

下面我们介绍球平均方法。

考虑Cauchy问题(3.1)和(3.13)，即

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0, \quad (3.18)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x). \quad (3.19)$$

首先引入球平均函数。对于 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $h(x) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 我们通常用它在以 $x$ 为中心 $r$ 为半径的球面上的平均值

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y \quad (3.20)$$

与之对应。令  $y = x + r\xi$ ,  $|\xi| = 1$ , 得

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi. \quad (3.21)$$

原来仅对  $r > 0$  用(3.20)定义  $M_h(x, r)$ 。现在利用(3.21)可把它的定义推广到所有的实数  $r$ 。所得到的  $M_h(x, r)$  是  $r$  的偶函数, 因为在(3.21)中用  $-r$  替换  $r$  被以  $-\xi$  替换积分变量  $\xi$  所抵消。从(3.21) 还可以看出, 当  $h \in C^s(\mathbb{R}^n)$  时, 成立  $M_h \in C^s(\mathbb{R}^{n+1})$ , 因为我们可在积分号下微分, 对于  $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , 利用散度定理有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \sum_{i=1}^n h_{x_i}(x + r\xi) \xi_i dS_\xi \\ &= \frac{r}{\omega_n} \int_{|\xi|<1} \Delta_x h(x + r\xi) d\xi \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \Delta_x \int_{|y-x|<r} h(y) dy \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \Delta_x \int_0^r d\rho \int_{|y-x|=\rho} h(y) dS_y \\ &= r^{1-n} \Delta_x \int_0^r \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho. \end{aligned}$$

上式两端乘以  $r^{n-1}$  并关于  $r$  微分得

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) \right) = \Delta_x r^{n-1} M_h(x, r). \quad (3.22)$$

这样, 任意函数  $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$  的球面平均  $M_h(x, r)$  满足偏微分方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(x, r) = \Delta_x M_h(x, r), \quad (3.23)$$

它就是所谓Darboux方程。利用(3.23)的解  $M_h(x, r)$  是  $r$  的偶函数这一事实, 我们找到它的相应的初值

$$M_h(x, 0) = h(x), \quad \left( \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) \right)_{r=0} = 0. \quad (3.24)$$

上面的讨论可以看出, 作球面平均, 能把波动方程的初值问题(3.18)-(3.19)变换为两个自变量的双曲型方程的初值问题。设  $u(x, t)$  是(3.18)-(3.19)的在半空间  $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$  上属于  $C^2$  类的解。把  $u$  看作  $x$  的函数作它的球面平均:

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi. \quad (3.25)$$

显然从  $M_u$  能重新得到  $u$ , 因为

$$M_u(x, 0, t) = u(x, t). \quad (3.26)$$

由(3.23)

$$\Delta_x M_u = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u.$$

另一方面, 由(3.18), (3.25)得

$$\begin{aligned} \Delta_x M_u &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \Delta_x u(x + r\xi, t) dS_\xi \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u. \end{aligned}$$

因此, 对于固定的 $x$ ,  $M_u(x, r, t)$ 作为两个标量变量 $r$ 和 $t$ 的函数是偏微分方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u \quad (3.27)$$

的解。依赖于参数 $n$ (在这里是 $x$ 空间的维数)的偏微分方程(3.27)称为Euler-Poisson-Darboux方程。由于(3.19), (3.25),  $M_u$ 作为 $r$ 和 $t$ 的参数是方程(3.27)的当 $t = 0$ 时有已知初值

$$M_u = M_\varphi(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial t} M_u = M_\psi(x, r) \quad (3.28)$$

的解。

当空间的维数 $n = 3$ 时, Cauchy问题(3.27)-(3.28)最容易解。事实上, 根据(3.27)有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rM_u) = c^2 \left( r \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u + 2 \frac{\partial}{\partial r} M_u \right) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_u).$$

这样,  $rM_u(x, r, t)$ 作为 $r, t$ 的函数是一维波动方程的在 $t = 0$ 时有初值

$$rM_u = rM_\varphi(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial t} rM_u = rM_\psi(x, r)$$

的解。根据D'Alembert公式, 有

$$rM_u(x, r, t) = \frac{1}{2}[(r+ct)M_\varphi(x, r+ct) + (r-ct)M_\varphi(x, r-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} \xi M_\psi(x, \xi) d\xi.$$

利用 $M_\varphi(x, r)$ 和 $M_\psi(x, r)$ 是 $r$ 的偶函数这一事实, 我们得到

$$M_u(x, r, t) = \frac{(ct+r)M_\varphi(x, ct+r) - (ct-r)M_\varphi(x, ct-r)}{2r} + \frac{1}{2rc} \int_{ct-r}^{ct+r} \xi M_\psi(x, \xi) d\xi.$$

令 $r$ 趋于零并把关于 $r$ 的微分换成关于 $ct$ 的微分, 根据(3.26)得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= tM_\psi(x, ct) + \frac{\partial}{\partial t}(tM_\varphi(x, ct)) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} \psi(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} \varphi(y) dS_y \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

(3.29)式通常称为Poisson公式。

当空间维数 $n = 3$ 时, Cauchy问题(3.18)-(3.19)的任何当 $t \geq 0$ 时属于 $C^2$ 类的解 $u$ 必定由公式(3.29)表示, 因此是唯一的。反之, 对于任何 $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ 和 $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ , 由(3.29)定义的 $u(x, t)$ 属于 $C^2$ 类并满足(3.18), (3.19)。

事实上, 利用(3.24)通过直接验算便得(3.19)。进一步根据 $n = 3$ 和 $r = ct$ 时的式(3.23)有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(tM_\psi(x, ct)) = c \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_\psi(x, r)) = cr \Delta_x M_\psi(x, r) = c^2 \Delta_x(tM_\psi(x, ct)).$$

这样,  $tM_\psi(x, ct)$ , 类似地 $\frac{\partial}{\partial t}(tM_\varphi(x, ct))$ 均满足波动方程(3.18)。

当 $n \neq 3$ 时, Cauchy问题(3.27)-(3.28)的求解更为困难。下面我们介绍用Hadamard的降维法来求解二维波动方程的Cauchy问题。

### 3.4 Hadamard降维法

下面我们讨论二维波动方程的Cauchy问题

$$u_{tt} - c^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) = 0, \quad (3.30)$$

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \quad u_t(0, x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2). \quad (3.31)$$

我们用Hadamard的降维思想来求解Cauchy问题(3.30)-(3.31)。

这个方法的核心思想是把所求偏微分方程的解看作是另一个有更多变元但是可解的方程的特解, 从而得到它们。特别的, 当 $n = 2$ 时, Cauchy问题(3.30)-(3.31)的解 $u(t, x_1, x_2)$ 可以看成是 $n = 3$ 时问题(3.18)-(3.19)与 $x_3$ 无关的解。于是, 对于 $x_3 = 0$ 和

$$\psi(y) = \psi(y_1, y_2), \quad \varphi(y) = \varphi(y_1, y_2),$$

公式(3.29)给出 $u(t, x_1, x_2)$ 的表示式, 其中面积分是在球面

$$|y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2} = ct$$

上作的。由于在这个球面上

$$dS_y = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2} dy_1 dy_2 = \frac{ct}{|y_3|} dy_1 dy_2,$$

并且点 $(y_1, y_2, y_3)$ 和 $(y_1, y_2, -y_3)$ 对积分有相同的贡献, 我们得到

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{r < ct} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi c} \iint_{r < ct} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2, \quad (3.32)$$

其中

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \quad (3.33)$$

我们看到点 $(t, x_1, x_2)$ 关于初始数据的依赖区域现在是 $y_1y_2$ 平面上的实心的圆域 $r \leq ct$ 。

同样的方法也适用于其他低维方程。例如考虑 $n = 3$ 时(3.1), (3.13)的具有特殊形式的解 $u$ :

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = e^{i\lambda x_3} v(t, x_1, x_2).$$

则 $v$ 是二维方程

$$v_{tt} = c^2(v_{x_1 x_1} + v_{x_2 x_2} - \lambda^2 c^2 v) \quad (3.34)$$

的解。在公式(3.29)中取

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = e^{i\lambda x_3} \tilde{\varphi}(x_1, x_2), \quad \psi(x_1, x_2, x_3) = e^{i\lambda x_3} \tilde{\psi}(x_1, x_2),$$

最后再令 $x_3 = 0$ 就得到(3.34)的 $t = 0$ 时有初值

$$v = \tilde{\varphi}(x_1, x_2), \quad v_t = \tilde{\psi}(x_1, x_2) \quad (3.35)$$

的解 $v$ 。

### 3.5 非齐次波动方程Cauchy问题的解

利用叠加原理知，非齐次波动方程Cauchy问题

$$u_{tt} = c^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) + f(t, x_1, x_2, x_3), \quad (3.36)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (3.37)$$

总可以分解成两个问题来解决：第一个问题是求齐次方程(3.14)满足非齐次初始条件(3.19)的解，这个解的求法已由前面的Poisson公式(3.29)给出；第二个问题是求非齐次方程(3.36)满足齐次初始条件

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0 \quad (3.38)$$

的解。

和一维的情况一样，上述的第二个问题可以利用齐次化原理求解，即先求齐次方程的下述Cauchy问题

$$w_{tt} = c^2(w_{x_1 x_1} + w_{x_2 x_2} + w_{x_3 x_3}), \quad (3.39)$$

$$w|_{t=\tau} = 0, \quad w_t|_{t=\tau} = f(\tau, x_1, x_2, x_3), \quad (3.40)$$

的解  $w(t, x_1, x_2, x_3; \tau)$ , 然后关于参数  $\tau$  积分, 得到

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \int_0^t w(t, x_1, x_2, x_3; \tau) d\tau, \quad (3.41)$$

它就是 Cauchy 问题(3.36)、(3.38) 的解。我们同样可以像一维情况一样给以物理上的解释, 现在我们仅从数学上进行验证。

首先验证由(3.41)式给出的函数  $u$  满足初始条件(3.38)。条件  $u|_{t=0} = 0$  的满足是显然的。今验证  $u_t|_{t=0} = 0$ 。由于

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w(t, x_1, x_2, x_3; t) + \int_0^t \frac{\partial w(t, x_1, x_2, x_3; \tau)}{\partial t} d\tau,$$

利用  $w$  所满足的初始条件  $w|_{t=\tau} = 0$ , 上式右端第一项等于零, 从而

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau,$$

因此  $u_t|_{t=0} = 0$ 。

再验证函数  $u$  满足方程(3.36)。为此, 将上面最后一式再关于  $t$  求导一次, 并注意到方程(3.39)及条件(3.40) 的第二式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial w(t, x_1, x_2, x_3; \tau)}{\partial t} \Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2 w(t, x_1, x_2, x_3; \tau)}{\partial t^2} d\tau \\ &= f(t, x_1, x_2, x_3) + c^2 \Delta \int_0^t w d\tau = c^2 \Delta u + f, \end{aligned}$$

其中  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ . 这就是说函数  $u$  满足方程(3.36)。这样就证明了(3.41)式确实给出 Cauchy 问题(3.36)、(3.38)的解。

现在我们把这个解明显地表示出来。根据 Poisson 公式, 有

$$w(t, x_1, x_2, x_3; \tau) = \frac{1}{4\pi c} \iint_{|y-x|=a(t-\tau)} \left[ \frac{f(\tau, \xi, \eta, \zeta)}{r} \right]_{r=c(t-\tau)} dS_y,$$

因此

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{4\pi c} \int_0^t \iint_{|y-x|=a(t-\tau)} \left[ \frac{f(\tau, \xi, \eta, \zeta)}{r} \right]_{r=c(t-\tau)} dS_y d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{ct} \iint_{|y-x|=r} \frac{f(t - \frac{r}{c}, \xi, \eta, \zeta)}{r} dS_y dr \quad (\tau = t - \frac{r}{c}) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \iiint_{r \leq at} \frac{f(t - \frac{r}{c}, \xi, \eta, \zeta)}{r} dV, \end{aligned} \quad (3.42)$$

其中  $dV$  表示体积微元，积分在以  $(x_1, x_2, x_3)$  为圆心、以  $ct$  为半径的球体中进行。因此在时刻  $t$ 、位于  $M(x_1, x_2, x_3)$  处解  $u$  的数值由函数  $f$  在时刻  $\tau = t - \frac{r}{c}$  处的值在此球中的体积积分表出，称这样的积分为推迟势。

在二维的情况，我们可以进行类似的讨论。

## 习 题

1. 利用 poisson 公式求解波动方程的 Cauchy 问题：

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x^2 + yz; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = x^3 + y^2 z, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

2. 求解下面波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = x^2(x + y), \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

3. 求二维波动方程的轴对称解(即二维波动方程的形如  $u = u(r, t)$  的解，其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ).

4. 试用齐次化原理导出平面非齐次波动方程

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(t, x, y)$$

在齐次初始条件

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0$$

下的求解公式。