第三章　波动方程

波动方程是最典型的一类双曲型方程，它可以用来描述自然界以及工程技术中的波动现象，例如在研究波的传播以及弹性体振动时经常会遇到这类方程。本章我们将介绍波动方程的一些基本概念，方法和结果。在第一节中我们介绍一维波动方程的Cauchy问题，着重介绍线形方程的叠加原理和齐次化原理（或称Duhamel原理）。在第二节中我们介绍一维波动方程的初边值问题，着重介绍一种常见的解法—分离变量法。第三节中介绍高维波动方程的Cauchy问题，特别地，用球平均法导出三维波动方程Cauchy问题的解的表达式，即Poisson 公式，进而用降维方法导出了二维波动方程相应的解的公式。在第三节的基础上，在第四节中我们研究了波动方程解的一些性质，譬如波的传播方式和衰减等，进而发现不同维数的波动方程的解的性质有着巨大差别。在第五节中，我们利用能量估计（或称能量积分）的方法，讨论了波动方程Cauchy问题以及初边值问题解的唯一性和稳定性。这种方法的基础是能量守恒原理。

§1.　一维波动方程Cauchy问题

本节我们讨论一维波动方程的Cauchy问题，着重介绍一维波动方程的叠加原理和齐次化原理(或称为Duhamel原理)。

1.1　叠加原理

在物理学的研究中经常会出现这样的现象：几种不同的原因的综合所产生的效果等于这些不同原因单独产生的效果的叠加。例如，几个外力同时作用在一个物体上所产生的加速度可以用单个外力各自单独作用在该物体上所产生的加速度相加而得出。这个原理被称为叠加原理。叠加原理的适用范围很广泛，譬如，叠加原理对于用线性方程和线性定解条 件描述的物理现象来说，都是成立的。下面我们利用一个具体例子说明之。对于弦振动方程，如果$u_1(t,x)$是方程

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f_1(t,x)$$

的解，而u_2是方程

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f_2(t,x)$$

的解，那么对于任意的常数C_1和C_2，函数

$$u(t,x)=C_1u_1(t,x)+C_2u_2(t,x)$$

是方程

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=C_1f_1(t,x)+C_2f_2(t,x)$$

的解。关于叠加原理的一个典型的例子就是声学中把弦线振动时所发生的复杂的声音分解成各种单音的叠加。事实上，早在十八世纪Bernoulli以及以后的Fourier就利用这个原理来研究弦振动方程的问题。

1.2 齐次化原理

考虑下述Cauchy问题

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(t,x), \tag{1.1}$$

$$t=0:\ u=0,\ u_t=0, \tag{1.2}$$

其中$c>0$是一常数，表示波的传播速度，$f(t,x)$是一给定的函数，表示t时刻在x处单位质点所受的外力。方程(1.1) 可用来描述强迫振动的弹性弦的微小振动。

为了求解Cauchy问题(1.1)-(1.2)，我们引入

$$w_{tt}-c^2w_{xx}=0, \tag{1.3}$$

$$t=\tau:\ w=0,\ w_t=f(\tau,x). \tag{1.4}$$

记Cauchy问题(1.3)-(1.4)的解为

$$w=w(t,x;\tau), \tag{1.5}$$

则我们有

定理 1.1 如果$w=w(t,x;\tau)$是Cauchy问题(1.3)-(1.4)的解（其中τ是参数），则Cauchy问题(1.1)-(1.2) 的解可以表示为

$$u(t,x)=\int_0^t w(t,x;\tau)d\tau. \quad \square \tag{1.6}$$

定理1.1被称为齐次化原理或Duhamel原理。

证明 首先我们验证由(1.6)式定义的函数$u(t,x)$满足初始条件(1.2)式。

由(1.6)式，显然有

$$u(0,x)=0. \tag{1.7}$$

另一方面，从(1.6)式可得

$$u_t(t,x)=w(t,x;t)+\int_0^t w_t(t,x;\tau)d\tau,$$

于是，再利用(1.4)可知

$$u_t|_{t=0}=w(0,x;0)=0. \tag{1.8}$$

(1.7)和(1.8)两式表明初始条件(1.2)式成立。

下面我们证明由(1.6)式定义的函数$u=u(t,x)$满足方程(1.1)。

由(1.6)及(1.4)易知

$$u_t(t,x)=w(t,x;t)+\int_0^t w_t(t,x;\tau)d\tau=\int_0^t w_t(t,x;\tau)d\tau.$$

$$u_{tt}=w_t(t,x;t)+\int_0^t w_{tt}(t,x;\tau)d\tau=\int_0^t w_{tt}(t,x;\tau)d\tau+f(t,x). \tag{1.9}$$

另一方面，有

$$u_{xx}=\int_0^t w_{xx}(t,x;\tau)d\tau. \tag{1.10}$$

于是，

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx} &= \int_0^t w_{tt}(t,x;\tau)d\tau+f(t,x)-c^2\int_0^t w_{xx}(t,x;\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \left[w_{tt}(t,x;\tau)-c^2w_{xx}(t,x;\tau)\right]d\tau+f(t,x) \\ &= f(t,x). \end{aligned} \tag{1.11}$$

在上式中的第三个等式中我们利用了方程(1.3)。(1.11)表明$u(t,x)$确实满足方程(1.1)。这样我们就证明了定理1.1。 ■

齐次化原理也可以用下述方法得到。

我们知道，非齐次项$f(t,x)$表示时刻 t在 x处的单位质量所受的外力，而u_t表示质点的速度。把时间段$[0,t]$分成若干个小时段$\Delta t_i=t_{i+1}-t_i\ \ (i=1,2,\cdots,n)$,在每个小时段$\Delta t_i$中，非齐次项$f(t,x)$可以看作与时间$t$无关，并以$f(t_i,x)$来表示。由于$f(t_i,x)=\dfrac{F(t_i,x)}{\rho}$(这里$F(t_i,x)$表示外力，而$\rho$是密度函数)，所以在时间段$\Delta t_i$内非齐次项所产生的速度改变是为$f(t_i,x)\Delta t_i$。我们把这个速度改变量看作是在时刻$t_i$时的初

始速度，它所产生的振动可以由下面的具有非齐初始条件的齐次方程的Cauchy问题来描述

$$\widetilde{w}_{tt} - c^2 \widetilde{w}_{xx} = 0, \tag{1.12}$$

$$t = t_i:\ \widetilde{w} = 0,\ \widetilde{w}_t = f(t_i, x)\Delta t_i. \tag{1.13}$$

记Cauchy问题(1.12)-(1.13)的解为$\widetilde{w} = \widetilde{w}(t, x; t_i, \Delta t_i)$。利用叠加原理，非齐次项$f(t, x)$所产生的总的效果可以看成是许多个这种瞬间作用的叠加。于是，Cauchy问题(1.1) - (1.2)的解$u = u(t, x)$可以表示为

$$u(t, x) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}(t, x; t_i, \Delta t_i). \tag{1.14}$$

由于(1.12)是线性方程，所以$\widetilde{w}$与Δt_i成正比，也就是说，如果记$w(t, x; \tau)$为如下齐次方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \quad (t > \tau), \\ t = \tau:\ w = 0,\ w_t = f(\tau, x) \end{cases} \tag{1.15}$$

的解，则有

$$\widetilde{w}(t, x; t_i, \Delta t_i) = \Delta t_i w(t, x; t_i). \tag{1.16}$$

于是，Cauchy问题(1.1)-(1.2)的解可以表示为

$$u(t, x) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}(t, x; t_i, \Delta t_i) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} w(t, x; t_i)\Delta t_i = \int_0^t w(t, x; \tau) d\tau.$$

这样，我们从另外一个角度重新得到定理1.1。

下面我们给出$w(t, x; \tau)$的具体表达式。为此，在Cauchy问题(1.15)中作变换$\tilde{t} = t - \tau$，于是(1.15)便化为

$$\begin{cases} w_{\tilde{t}\tilde{t}} - c^2 w_{xx} = 0 \quad (\tilde{t} > 0), \\ \tilde{t} = 0:\ w = 0,\ w_{\tilde{t}} = f(\tau, x) \end{cases} \tag{1.17}$$

的形式。这样，由$D'Alembert$公式（见上一章中的(4.13)式）可知，Cauchy问题(1.17)的解为

$$w(t, x; \tau) = \frac{1}{2c} \int_{x - c\tilde{t}}^{x + c\tilde{t}} f(\tau, \xi) d\xi = \frac{1}{2c} \int_{x - c(t-\tau)}^{x + c(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi. \tag{1.18}$$

再利用(1.6)式就可得到Cauchy问题(1.1)-(1.2)的解为

$$u(t, x) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x - c(t-\tau)}^{x + c(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau = \frac{1}{2c} \iint_{\Omega} f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \tag{1.19}$$

其中区域Ω为$(\tau,\xi)-$平面上过点(t,x)向下做两特征线与$\xi-$轴所围成的三角形区域(见图1.1)。

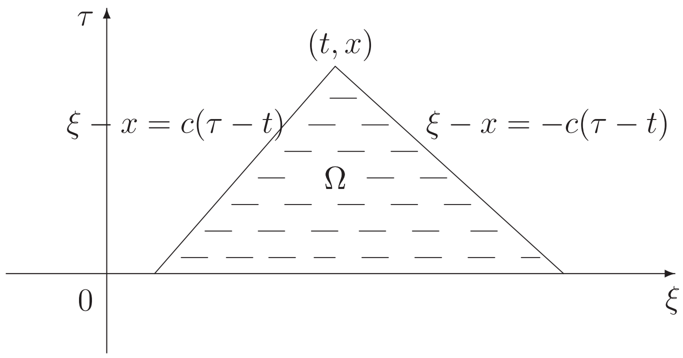

图 1.1. 三角形区域Ω

上面我们用两种方法得到了Cauchy问题(1.1)-(1.2)的解的表达式(1.19)式。它究竟是否确实是Cauchy问题(1.1)-(1.2)的解呢？这一点还需要按照解的定义进行验证。

我们假设$f\in C^1$。由(1.19)式可知，

$$u_t=\frac{1}{2}\int_0^t\left[f(\tau,x+c(t-\tau))+f(\tau,x-c(t-\tau))\right]d\tau, \tag{1.20}$$

$$u_{tt}=f(t,x)+\frac{c}{2}\int_0^t\left[f_x(\tau,x+c(t-\tau))-f_x(\tau,x-c(t-\tau))\right]d\tau, \tag{1.21}$$

$$u_x=\frac{1}{2c}\int_0^t\left[f(\tau,x+c(t-\tau))-f(\tau,x-c(t-\tau))\right]d\tau, \tag{1.22}$$

$$u_{xx}=\frac{1}{2c}\int_0^t\left[f_x(\tau,x+c(t-\tau))-f_x(\tau,x-c(t-\tau))\right]d\tau. \tag{1.23}$$

于是，有

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(t,x),$$

即$u(t,x)$满足方程(1.1)。再由(1.19)式和(1.20)式可知

$$u|_{t=0}=0,\qquad u_t|_{t=0}=0,$$

即$u(t,x)$满足初始条件(1.2)式。因此，由(1.19)式定义的函数$u(t,x)$的确是Cauchy问题(1.1)-(1.2) 的解。

注记1.1 利用叠加原理，我们容易得到下述一般的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \\ t = 0:\ u = \varphi(x),\ u_t = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \end{cases} \tag{1.24}$$

的解。 □

注记1.2 齐次化原理不仅可以应用于非齐次波动方程的Cauchy问题，而且也能应用于初边值问题以及其它方程（譬如热传导方程）的定解问题，以后我们将多次用到这一原理。 □

习 题

1. 证明方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{a^2}(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (h > 0\text{为常数})$$

的通解可以写成

$$u = \frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x},$$

其中F, G为任意的具有二阶连续导数的单变量函数，并由此求解它的初值问题：

$$t = 0:\ \ u = \varphi(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x).$$

2. 问初始条件$\varphi(x)$与$\psi(x)$满足怎样的条件时，齐次波动方程初值问题的解仅由右传播波组成？

3. 利用传播波法，求解波动方程的古沙(Goursat)问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x), \\ u|_{x+at=0} = \psi(x) \quad (\text{其中}\varphi(0) = \psi(0)). \end{cases}$$

4. 对非齐次波动方程的初值问题(1.24)，证明：当$f(x,t)$不变时，

（1）如果初始条件在x轴的区间$[x_1, x_2]$上发生变化，那么对应的解在区间$[x_1, x_2]$的影响区域以外不发生变化；

（2）在x轴区间$[x_1, x_2]$上所给的初始条件唯一地确定区间$[x_1, x_2]$的决定区域中解的数值。

5. 求解

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad x>0, \quad t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=0, \\ u_x-ku_t|_{x=0}=0, \end{cases}$$

其中 k为正常数。

6. 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \quad 0<t<kx, \quad k>1, \\ u|_{t=0}=\varphi_0(x), \quad x\geqslant 0, \\ u_t|_{t=0}=\varphi_1(x), \quad x\geqslant 0, \\ u_t|_{t=kx}=\psi(x), \end{cases}$$

其中$\varphi_0(0)=\psi(0)$。

7. 求解下述边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \quad 0<t<f(x), \\ u|_{t=x}=\varphi(x), \\ u|_{t=f(x)}=\psi(x), \end{cases}$$

其中$\varphi(0)=\psi(0), t=f(x)$为由原点出发的、介于特征线$x=t$与$x=-t$之间的光滑曲线，且对一切 x，$f'(x)\neq 1$。

8. 求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t\sin x, \\ u|_{t=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x. \end{cases}$$

9. 求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+\dfrac{tx}{(1+x^2)^2}, \\ u|_{t=0}=0, \\ u_t|_{t=0}=\dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

§ 2. 一维波动方程的初边值问题

本节我们介绍一维波动方程的初边值问题：首先介绍一些基本概念，然后介绍一种常用的求解方法—分离变量法。

2.1 定解条件和定解问题

大家知道，弦振动方程

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x) \tag{2.1}$$

是一个典型的双曲型方程，它是一个含有未知函数$u(t, x)$的关于自变量的二阶偏导数的偏微分方程。对于一个偏微分方程来说，如果有一个函数$u(t, x)$具有方程中所需要的各阶连续偏导数，且将它代入方程时，可以使方程恒成立，那么就称这个函数是该方程的一个解。在实际应用中，往往将所讨论的问题归结为一个偏微分方程(组)，然后从方程(组)中求得解或者研究解的定性或定量性质。

偏微分方程往往可以看成是相应的物理规律的数学表述。例如，弦振动方程(2.1)描述了弦作微小横振动时位移$u(t, x)$所满足的一般性物理规律，但是仅仅利用它还不能够完全确定所考察弦的运动状况，这是因为弦的运动还要与它的初始状态和边界所在处的状况有关，因此，还必须得给出一些描述这些状态或状况的相应的条件。

下面我们以弦振动方程为例来说明偏微分方程理论中的一些基本概念。

在弦振动问题中，弦的两端被固定在$x = 0$及$x = L$两端，因此有

$$u(t, 0) = 0 \quad u(t, L) = 0. \tag{2.2}$$

条件(2.2)式被称为方程(2.1)的边界条件。在初始时刻$t = 0$时弦的位置和速度为

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \quad (x \in [0, L]), \tag{2.3}$$

通常称(2.3)式为初始条件。

边界条件和初始条件总称为方程(2.1)的定解条件。将方程(2.1)和定解条件(2.2)-(2.3)结合起来就得到下述的定解问题：

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x) \quad (t > 0,\ x \in (0, L)), \tag{2.4}$$

$$t = 0:\ u = \varphi(x),\ u_t = \psi(x) \quad (x \in [0, L]), \tag{2.5}$$

$$x = 0:\ u = 0 \quad (t > 0), \tag{2.6}$$

$$x = L:\ u = 0 \quad (t > 0). \tag{2.7}$$

上述定解问题也称为方程(2.1)的混合初边值问题（简称初边值问题）。在带状区域

$$U = \{(t, x) | t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L\} \tag{2.8}$$

上求定解问题(2.4)-(2.7)就是要求解这样的连续可微函数$u = u(t, x)$：它在区域$\{(t, x)|t > 0, 0 < x < L\}$中满足波动方程(2.4)，在 $x-$轴上的区间段 $[0, L]$上满足初始条件(2.5)，而在边界$x = 0, L$上分别满足边界条件(2.6)和(2.7)式。

形如(2.2)的边界条件一般称为第一类边界条件（或称Dirichlet边界条件）。对于弦振动方程的边界条件通常还有以下两种：

第二类边界条件 弦的一端（譬如$x = 0$处）处于自由状态，也就是说，该端点可以在垂直于 $x-$轴的直线上自由滑动，它没有受到垂直方向的外力。如果记$T(x)$为弦在点 x处的张力，于是在端点$x = 0$处的张力的垂直方向的分量是$T(0)\dfrac{\partial u}{\partial x}$，这样在$x = 0$处成立

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{2.9}$$

甚至可以考虑更加一般的边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \gamma(t), \tag{2.10}$$

其中$\gamma(t)$是 t的已知函数。这种边界条件称为第二类边界条件（也称为Neumann边界条件）。通常(2.9)称为齐次Neumann边界条件，而(2.10)称为非齐次Neumann边界条件。

第三类边界条件 在实际应用中还会遇到另一种情形：将弦的一端固定在一弹性支承上，也就是说此时支承的伸缩满足Hooke定律。如果支承原来的位置为$u = 0$，则u在端点的值表示支承在该点的伸长量。例如，在$x = 0$的一端，弦对支承拉力的垂直方向分量为$-T\dfrac{\partial u}{\partial x}$，由Hooke定律知

$$-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = ku|_{x=0},$$

其中k是弹性系数。于是在弹性支承的情形下，边界条件为

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u\right)\right|_{x=0} = 0, \tag{2.11}$$

其中$\sigma = k/T$是已知的正常数。在数学上也可以考虑更加一般的边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \right)\Big|_{x=0} = \mu(t), \tag{2.12}$$

其中$\mu(t)$是 t的已知函数。这种边界条件通常称为第三类边界条件。

显然，方程(2.1)和上一章中的(4.1)不同，(2.1)式包含了不含u及其偏导数的项$f(t,x)$，这种方程称为非齐次方程，而$f(t,x)$称为非齐次项。类似地，(2.6)-(2.7)称为齐次边界条件，而

$$u|_{x=0} = \alpha(t), \quad u|_{x=L} = \beta(t)$$

则称为非齐次边界条件。同样，初始条件(2.3)称为非齐次初始条件；特别地，当$\varphi \equiv \psi \equiv 0$时，(2.3)称为齐次初始条件。

研究偏微分方程的核心内容是求解各类定解问题的解以及解的定量或定性性质，从而使人们对其描述的自然现象或工程技术中的问题有更加深入的认识和了解。自然遇到的问题有：(1)定解问题的提法是否合理？例如这个定解问题的解是否存在？这就是解的存在性；(2)如果解存在，解是否唯一？这就是解的唯一性；(3)如果解存在且唯一，该解是否稳定？或者说，解对定解条件或非齐次项的连续依赖如何？或者说，当定解条件或非齐次项作“很小”的变化时，问题的解是否也作“很小”的变化？这便是解的稳定性。

定解问题的适定性 定解问题的存在性，唯一性和稳定性总称为定解问题的适定性。如果一个定解问题的解是存在的、唯一的并且是稳定的，那么我们就称这个问题是适定的，也就是说，这个定解问题的提法是合适的。

事实上，偏微分方程的适定性问题是偏微分方程理论中的基本问题。对于具有决定性的现象来说，一个基本上正确 地（在误差许可的范围内近似地）描述所考察物理问题或模型的偏微分方程的定解问题，它的解应该是存在的、唯一并且是稳定的。这是因为所考察的物理问题在一定的条件下，总是具有唯一确定的状态。因此，相应的偏微分方程的定解问题也应该具有唯一的“解”，换句话说，它的解应该是存在的，唯一的。另一方面，在实际测量中总会有误差，如果定解条件的微小误差会引起解的“巨大”变化，这样所研究的定解问题实际上是不可能给出相应于所考察的物理问题的近似解，从而不可能正确地描述所考察物理问题所刻画的物理现象，进而失去它的实际作用。因此，在求解偏微分方程定解问题的过程中，对定解问题的适定性进行一

定的分析，可以帮助人们初步判定所建立的数学模型是否合理，所提出的定解条件是否合适，并对求解起一定的指导作用。这里顺便说明一下，定解条件通常是受具体的物理背景启发而给出的。

粗略地讲，偏微分方程理论包括下述几个重要研究内容：

$$
\begin{cases}
\text{偏微分方程（组）的建立及定解条件的提出；} \\
\text{定解问题的适定性；} \\
\text{解的正则性；} \\
\text{解的大范围性态（包括解的渐近性，衰减性，极限性态等）；} \\
\text{具体求解方法（精确解，近似解以及数值解等）；} \\
\text{解的定性性质（譬如群不变性，对称性）；} \\
\text{其它。}
\end{cases}
$$

2.2 分离变量法

在第一节中我们讨论了一维波动方程的Cauchy问题，本节我们将介绍它的初边值问题。考察一维波动方程的下述初边值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x), \\
t = 0: \quad u = \varphi(x), \quad u_t = \psi(x), \\
x = 0: \quad u = 0, \\
x = L: \quad u = 0.
\end{cases}
\tag{2.13}
$$

利用叠加原理易知，初边值问题(2.13)可以分解为下面两个初边值问题

$$
\begin{cases}
v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, \\
t = 0: \quad v = \varphi(x), \quad v_t = \psi(x), \\
x = 0: \quad v = 0, \\
x = L: \quad v = 0
\end{cases}
\tag{2.14}
$$

和

$$
\begin{cases}
w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(t,x), \\
t = 0: \quad w = 0, \quad w_t = 0, \\
x = 0: \quad w = 0, \\
x = L: \quad w = 0.
\end{cases}
\tag{2.15}
$$

显然有

$$u = v + w. \tag{2.16}$$

求解(2.13)的关键是如何求解(2.14)，因为从下面的讨论中可以看出(2.15)的求解可以归结为(2.14)的求解。我们首先介绍初边值问题(2.14)的求解方法，然后解决(2.15)。

定解问题(2.14)实际上描述了两端固定的弦作自由振动的物理过程。它的求解方法是受到下述物理事实的启发：从物理学上知道，一个复杂的振动往往可以分解成许多简单的振动的线性叠加。譬如弦振动所发出的声音总可以被看成是各种不同频率的单音的线性叠加，而对于每种单音，弦振动时波形保持不变，换句话说，当时间变化时，各点的振动作同步的变化，即每种单音都具形式为

$$u(t, x) = T(t)X(x) \tag{2.17}$$

的特解。整个复杂的振动过程可以通过这种特解得线性叠加而得到。

下面我们详细介绍如何利用上述想法来求解初边值问题(2.14)，即

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \tag{2.18}$$

$$t = 0: \quad u = \varphi(x), \quad u_t = \psi(x), \tag{2.19}$$

$$x = 0: \quad u = 0, \tag{2.20}$$

$$x = L: \quad u = 0. \tag{2.21}$$

我们首先求解方程(2.18)的满足边界条件(2.20)-(2.21)的具有下述分离变量形式的非平凡解（不恒为零的解）

$$u(t, x) = T(t)X(x), \tag{2.22}$$

其中$T(t), X(x)$分别表示仅与t有关及仅与x有关的待定函数。

将(2.22)代入方程(2.18)可得

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0,$$

即

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{2.23}$$

(2.23)式具有分离变量的形式，即其左边仅是t的函数，而右边仅是x的函数，左右两端相等意味着两端必须同时等于一个常数。记这个常数为$-\lambda$（其值待定），我们就得到

$$T''(t) + c^2\lambda T(t) = 0 \tag{2.24}$$

及

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{2.25}$$

这样方程(2.23)就被分离成两个常微分方程(2.24)和(2.25)，其中(2.24)仅含自变量t，而(2.25) 仅含自变量x。下面我们通过求解(2.24)和(2.25)来得到(2.22)。

为了使解(2.22)满足边界条件(2.20)和(2.21)，我们要求方程(2.25)的解$X(x)$满足下述边界条件

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \tag{2.26}$$

这样求解$X = X(x)$的问题就可归结为求解常微分方程的两点边值问题(2.25)-(2.26)。根据λ的取值不同，分下面三种情况进行讨论。

情形1 $\lambda < 0$： 当$\lambda < 0$时，方程(2.25)的通解为

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}. \tag{2.27}$$

要使它满足边界条件(2.26)，必须要求

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

注意到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}L} & e^{-\sqrt{-\lambda}L}, \end{vmatrix} \neq 0,$$

故(2.28)式中的C_1和C_2只能是

$$C_1 = C_2 = 0$$

的平凡情形。因此，在$\lambda < 0$的情况下，得不到非平凡解。

情形2 $\lambda = 0$： 此时，方程(2.25)的通解为

$$X(x) = C_1 + C_2 x. \tag{2.29}$$

要使它满足边界条件(2.26)，$X(x)$也只能恒为零。

情形3 $\lambda > 0$： 当$\lambda > 0$时，方程(2.25)的通解为

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x. \tag{2.30}$$

由边界条件$X(0) = 0$知

$$C_1 = 0. \tag{2.31}$$

再由另一边界条件$X(L) = 0$可知

$$C_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0.$$

为了使$C_2 \neq 0$，必须要求$\sin \sqrt{\lambda} L = 0$.于是，

$$\lambda = \lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.32}$$

这样，我们就找到了一族非平凡解

$$X_k(x) = C_k \sin(\frac{k\pi}{L} x) \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.33}$$

通常称(2.33)右端的函数（即$\sin(\frac{k\pi}{L}x)$）为常微分方程(2.25)满足边界条件(2.26)的特征函数（或固有函数），而$\lambda_k = k^2\pi^2/L^2$称为相应的特征函数（或固有函数）。

将特征值λ_k代入方程(2.24)便可得到其通解

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi c}{L} t + B_k \sin \frac{k\pi c}{L} t \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{2.34}$$

其中A_k, B_k是任意常数。

这样，我们就得到方程(2.18)满足齐次边界条件(2.20)-(2.21)的具有分离变量形式的特解

$$u_k(t, x) = T_k(t) X_k(x) = \left(A_k \cos \frac{k\pi c}{L} t + B_k \sin \frac{k\pi c}{L} t \right) \sin \frac{k\pi}{L} x \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

下面我们利用上述特解来构造初边值问题(2.18)-(2.21)的解。一个自然的想法是做下述线性组合

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi c}{L} t + B_k \sin \frac{k\pi c}{L} t \right) \sin \frac{k\pi}{L} x, \tag{2.35}$$

并要求它满足初始条件(2.19)，从而决定出待定常数A_k和B_k.

当上述级数可以逐项求导时，我们有

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi c}{L} \left(-A_k \sin \frac{k\pi c}{L} t + B_k \cos \frac{k\pi c}{L} t \right) \sin \frac{k\pi}{L} x.$$

于是，注意到初始条件(2.19)式可知

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{L} x, \\ \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi c}{L} \sin \frac{k\pi}{L} x. \end{cases}$$

从上式易知，A_k和$\frac{k\pi c}{L} B_k$应该分别为$\varphi(x)$和$\psi(x)$在区间 $[0,L]$上的按正弦展开的Fourier级数的系数，即

$$\begin{cases} A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\eta) \sin \frac{k\pi\eta}{L} d\eta, \\ B_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^L \psi(\eta) \sin \frac{k\pi\eta}{L} d\eta. \end{cases} \tag{2.36}$$

将(2.36)式代入(2.35)便得到用级数形式表示的初边值问题(2.18)-(2.21)的解。

下面我们证明，当初始条件$\varphi(x)$和$\psi(x)$满足适当的条件时，级数形式的解(2.35)的确是该定解问题的解。为此，注意到级数(2.35)式中的每一项都满足方程(2.18)，因此只要说明当$\varphi(x)$和$\psi(x)$满足一定的条件时，级数(2.35)可以逐项求导两次即可。换句话说，如果在一定的条件下证明了级数(2.35)求导两次后仍是一致收敛的，则它一定满足方程(2.18)。此时，其定解条件(2.19)-(2.21)的满足是显然的。

由Fourier分析可知

引理2.1 设$f(x)$是区间 $[0,l]$上的连续函数，它的m阶导数连续，但$m+1$阶导数分段连续，并且

$$f^{(i)}(0) = f^{(i)}(l) = 0 \quad (i = 0, 2, \cdots, 2[\frac{m}{2}]).$$

如果将$f(x)$在区间 $[0,l]$上展开为Fourier级数

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

则由级数a_k所构成的级数$\sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k|$是收敛的。 □

证明 由于假设$f(x)$的$m+1$阶导数是分段连续的，因此$f^{(m+1)}(x)$可以在区间 $[0,l]$上展开成傅里叶级数。当m为奇数时，展开式为

$$f^{(m+1)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(m+1)} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

而当m为偶数时，展开式为

$$f^{(m+1)}(x) \sim \frac{a_0^{(m+1)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(m+1)} \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

根据帕塞瓦尔（Parseval）等式

$$\frac{(a_0^{(m+1)})^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(m+1)})^2 = \frac{2}{l} \int_0^l \left[f^{(m+1)}(x)\right]^2 dx < \infty.$$

现在计算$a_k^{(m+1)}$.

当 m为奇数时，

$$\begin{aligned}
a_k^{(m+1)} &= \tfrac{2}{l} \int_0^l f^{(m+1)}(\xi) \sin \tfrac{k\pi\xi}{l} d\xi \\
&= \tfrac{2}{l} \left[f^{(m)}(\xi) \sin \tfrac{k\pi\xi}{l}\right]_0^l - \tfrac{2}{l} \tfrac{k\pi}{l} \int_0^l f^{(m)}(\xi) \cos \tfrac{k\pi\xi}{l} d\xi \\
&= -\tfrac{2}{l} \tfrac{k\pi}{l} \left[f^{(m-1)}(\xi) \cos \tfrac{k\pi\xi}{l}\right]_0^l - \tfrac{2}{l} (\tfrac{k\pi}{l})^2 \int_0^l f^{(m-1)}(\xi) \sin \tfrac{k\pi\xi}{l} d\xi \\
&= -\tfrac{2}{l} (\tfrac{k\pi}{l})^2 \int_0^l f^{(m-1)}(\xi) \sin \tfrac{k\pi\xi}{l} d\xi,
\end{aligned}$$

这里已利用了$f^{(m-1)}(x)$在$x=0$及$x=l$处为零的条件。如此继续下去，可以得到

$$a_k^{(m+1)} = (-1)^{\frac{m+1}{2}} (\frac{k\pi}{l})^{m+1} a_k.$$

当 m为偶数时，类似地可以得到

$$a_k^{(m+1)} = (-1)^{\frac{m}{2}} (\frac{k\pi}{l})^{m+1} a_k.$$

由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(m+1)})^2 < \infty,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m+2} a_k^2 < \infty.$$

这样，利用Cauchy不等式，就得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m+2} |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \infty.$$

引理证毕。 □

作为引理2.1的一个推论，我们有

推论2.1 如果$\varphi(x)\in C^3,\psi(x)\in C^2$并且满足

$$\varphi(0)=\varphi(L)=\varphi''(0)=\varphi''(L)=\psi(0)=\psi(L)=0, \tag{2.37}$$

而系数A_k,B_k由(2.36)式给定，则级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2|A_k| \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{\infty}k^2|B_k|$$

收敛。 □

由推论2.1可知，(2.35)式右端的级数关于x和t逐项求导二次后所得到的级数是绝对且一致收敛的，因此这些求导后的级数收敛于u的相应的导数，于是由(2.35)式定义的u满足相应的方程、初始条件以及边界条件。这样我们得到

定理2.1 若函数$\varphi(x)\in C^3,\psi(x)\in C^2$并且满足(2.37)式，则定解问题(2.18)-(2.21)的解存在，并且它可以用级数(2.35)式给出，其中A_k和B_k由(2.36)式给定。 □

条件(2.37)式通常被称为初边值问题的相容性条件。以上求解方法的一个明显的特点是利用具有分离变量形式的特解(2.22)来构造初边值问题(2.18)-(2.21)的解，这种求解方法被称为分离变量法。早在十八世纪初，Fourier首先利用这种方法求解偏微分方程，因此这种方法也称为Fourier方法。这种求解方法同时也展示了Fourier级数的作用与威力，进而得到世人的重视。

近似解 当$\varphi(x)$和$\psi(x)$不满足定理2.1中所要求的条件时，譬如$\varphi(x)$及$\psi(x)$仅为连续函数，此时我们可以把$\varphi(x)$和$\psi(x)$分别看成函数列

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}A_k\sin\frac{k\pi}{L}x, \quad \psi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\frac{k\pi c}{L}\sin\frac{k\pi}{L}x$$

的平均收敛的极限。对应于初始条件$\varphi_n(x)$和$\psi_n(x)$的方程(2.18)的解为

$$u_n(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\cos\frac{k\pi c}{L}t+B_k\sin\frac{k\pi c}{L}t\right)\sin\frac{k\pi}{L}x. \tag{2.38}$$

当$n\to\infty$时，$u_n(t,x)$平均收敛于(2.35)式所给出的形式解。因而$u(t,x)$可以看作是函数列$\{u_n\}$的平均收敛的极限，而$u_n(t,x)$的初始条件也分别平均收敛到$\varphi(x)$和$\psi(x)$。当n很大时，可以把$u_n(t,x)$看成是问题的近似解，因为此时它满足方程和边界条件，同时也近似地满足初始条件。

在实际应用中，近似解常常是行之有效的。而作为近似解的平均收敛极限$u(t,x)$，它能够比所有的近似解$u_n(t,x)$更好地反映实际物理现象，虽然它不符合经典解的定义，但也具有十分重要的实际意义，因而也将它称为相应的初边值问题的解（广义解）。

解的物理意义 由级数(2.35)式知，初边值问题(2.18)-(2.21)的解是

$$u_k(t,x)=\left(A_k\cos\frac{k\pi c}{L}t+B_k\sin\frac{k\pi c}{L}t\right)\sin\frac{k\pi}{L}x=N_k\cos(\omega_k t+Q_k)\sin\frac{k\pi}{L}x \tag{2.39}$$

的线性叠加，其中

$$N_k=\sqrt{A_k^2+B_k^2},\quad \omega_k=\frac{k\pi c}{L},\quad \sin Q_k=\frac{-B_k}{N_k},\quad \cos Q_k=\frac{A_k}{N_k}.$$

在物理上，N_k称为波的振幅，ω_k称为波的频率，Q_k为波的相位角。注意到波的传播速度 c只依赖弦本身，因此，当 k固定时，频率ω_k也称为固有频率。

实际上，$u_k(t,x)=N_k\sin\dfrac{k\pi}{L}x\cos(\omega_k t+Q_k)$代表如下的振动波：在所考虑的振动弦上的各点均以同一频率作简谐振动，其中它们的位相角相同，而振幅$|N_k\sin\dfrac{k\pi}{L}x|$依赖于点 x的位置。特别地，弦上位于$x=mL/k\ (m=0,1,\cdots,k)$处的点在振动中保持不动，这些点称为节点。弦的这种形态的振动称为驻波。于是，级数(2.35)可以看成是一系列频率成倍增长、位相角不同、振幅不同的驻波线性叠加而成，因此分离变量法又称为驻波法。

从声学上，弦所发出的声音，它的音调由其振动的频率决定，而声音的弦度（或大小）则取决于其振动的振幅。弦所能发出的最低音所对应的频率就是其最低固有频率，即$\omega_1=\dfrac{\pi c}{L}$。这个音称为基音。其余的频率$\omega_k$均是$\omega_1$的整数倍，称它们为泛音。一般来说，弦所发出的声音是由其基音与泛音叠加而成的。

例子 设弦的两端固定在 $x-$轴上的$x=0$和$x=1$两点处。在点$x=a$（其中$a\in(0,1)$）处向上拉起 h（$|h|\ll 1$），然后放开该弦做自由振动。求其运动规律。

解 以$u(t,x)$表示弦上各点的振动，它满足初边值问题(2.18)-(2.21)，其中初始条件为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{a}x, & \forall x\in[0,a],\\ \dfrac{h}{1-a}(1-x), & \forall x\in[a,1],\end{cases} \tag{2.40}$$

$$\psi(x)\equiv 0. \tag{2.41}$$

于是，该问题的解$u(t,x)$可以用(2.35)式表示。注意到(2.41)式知，

$$B_k \equiv 0.$$

利用(2.40)式，我们有

$$\begin{aligned} A_k &= 2\int_0^1 \varphi(\eta)\sin(k\pi\eta)d\eta \\ &= 2\int_0^a \tfrac{h}{a}\eta\sin(k\pi\eta)d\eta + 2\int_a^1 \tfrac{h}{1-a}(1-\eta)\sin(k\pi\eta)d\eta \\ &= \frac{2h}{\pi^2 a(1-a)k^2}\sin(k\pi a). \end{aligned}$$

这样，我们就得

$$u(t,x) = \frac{2h}{\pi^2 a(1-a)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin(k\pi a)\sin(k\pi x)\cos(k\pi ct). \quad \square$$

2.3 非齐次方程

下面我们讨论非齐次方程的初边值问题

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x), \tag{2.42}$$

$$t=0: \quad u=0, \quad u_t=0, \tag{2.43}$$

$$x=0: \quad u=0, \tag{2.44}$$

$$x=L: \quad u=0. \tag{2.45}$$

类似于第一节中所讨论的非齐次方程的Cauchy问题，我们有

齐次化原理 若$w=w(t,x;\tau)$是初边值问题

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \quad (t>\tau), \\ t=\tau: \quad w=0, \quad w_t = f(\tau,x), \\ x=0: \quad w=0, \\ x=L: \quad w=0 \end{cases} \tag{2.46}$$

的解（其中$\tau \geqslant 0$视为参数），则

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x;\tau)d\tau \tag{2.47}$$

一定是初边值问题(2.42)-(2.45)的解。 $\square$

令

$$s = t - \tau,$$

则初边值问题(2.46)可化为

$$\begin{cases} w_{ss} - c^2 w_{xx} = 0 \quad (s > 0), \\ s = 0: \quad w = 0, \quad w_s = f(\tau, x), \\ x = 0: \quad w = 0, \\ x = L: \quad w = 0. \end{cases} \tag{2.48}$$

由(2.35)-(2.36)式，我们得到

$$w = w(s, x; \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi c}{L} s \sin \frac{k\pi}{L} x = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi c}{L}(t - \tau) \sin \frac{k\pi}{L} x, \tag{2.49}$$

其中

$$B_k(\tau) = \frac{2}{k\pi c} \int_0^L f(\tau, \xi) \sin \frac{k\pi}{L} \xi d\xi. \tag{2.50}$$

利用齐次化原理，将(2.49)代入(2.47)便得到初边值问题(2.42)-(2.45)的解：

$$u(t, x) = \int_0^t w(t, x; \tau) d\tau = \sin \frac{k\pi}{L} x \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t B_k(\tau) \sin \frac{k\pi c}{L}(t - \tau) d\tau. \tag{2.51}$$

类似于定理2.1，我们可以证明，在$f(t, x) \in C^2$且满足

$$f(t, 0) = f(t, L) = 0$$

的假设下，级数(2.51)确实是初边值问题(2.42)-(2.45)的解。

2.4 非齐次边界条件

下面我们讨论弦振动方程具有非齐次边界条件的初边值问题

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x), \tag{2.52}$$

$$t = 0: \quad u = \varphi(x), \quad u_t = \psi(x), \tag{2.53}$$

$$x = 0: \quad u = \gamma_1(t), \tag{2.54}$$

$$x = L: \quad u = \gamma_2(t). \tag{2.55}$$

在这里除了我们要求函数$\varphi(x),\psi(x),f(x)$满足前面所给出的条件外，我们还假设$\gamma_1(t),\gamma_2(t)$具有二阶连续导数，且满足

$$\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=0.$$

利用叠加原理，初边值问题(2.52)-(2.55)可以分解成定解问题(2.14)，定解问题(2.15)以及

$$z_{tt}-c^2z_{xx}=0, \tag{2.56}$$

$$t=0:\quad z=0,\quad z_t=0, \tag{2.57}$$

$$x=0:\quad z=\gamma_1(t), \tag{2.58}$$

$$x=L:\quad z=\gamma_2(t). \tag{2.59}$$

而定解问题(2.52)-(2.55)的解为

$$u=v+w+z.$$

下面我们只需求解定解问题(2.56)-(2.59)。实际上，通过适当的未知函数变换，定解问题(2.56)-(2.59) 可以归结为定解问题(2.14)和(2.15)来求解。事实上，令

$$Z(t,x)=\gamma_1(t)+\frac{x}{L}(\gamma_2(t)-\gamma_1(t)). \tag{2.60}$$

显然，$Z=Z(t,x)$是一个满足边界条件(2.58)和(2.59)的函数。通过变换

$$U(t,x)=z(t,x)-Z(t,x) \tag{2.61}$$

引入新的未知函数U，容易验证$U=U(t,x)$满足

$$U_{tt}-c^2U_{xx}=-\gamma_1''(t)-\frac{x}{L}(\gamma_2''(t)-\gamma_1''(t)) \tag{2.62}$$

以及非齐次初始条件

$$t=0:\qquad \begin{aligned} &U=z(0,x)-Z(0,x)=-\gamma_1(0)-\frac{x}{L}(\gamma_2(0)-\gamma_1(0)),\\ &U_t=z_t(0,x)-Z_t(0,x)=-\gamma_1'(0)-\frac{x}{L}(\gamma_2'(0)-\gamma_1'(0)). \end{aligned} \tag{2.63}$$

显然，U同时满足齐次边界条件。于是，利用叠加原理和前述方法可求出U，进而利用(2.61)式得到初边值问题(2.56) -(2.59)的解

$$z(t,x)=U(t,x)+Z(t,x). \tag{2.64}$$

习 题

1. 用分离变量法求解：

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{3\pi x}{L}, \quad u_t|_{t=0} = x(L-x), \\ x = 0: \quad u = 0, \\ x = L: \quad u = 0; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \\ u(x,0) = \dfrac{h}{L}x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

2. 设弹簧一端固定，一端在外力作用下作周期振动，此时定解问题归结为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = A\sin\omega t, \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

求解此问题。

3. 求弦振动方程

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

满足以下定解条件的解：

(1) $$u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$$
$$u|_{t=0} = \sin\frac{3}{2l}\pi x, \quad u_t|_{t=0} = \sin\frac{5}{2l}\pi x.$$

(2) $$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

4. 用分离变量法求解初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin\dfrac{\pi x}{2l}, \end{cases}$$

其中g为常数。

5. 用分离变量法求下面问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bshx, \\ u|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

6. 用分离变量法求下面问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (b > 0), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \dfrac{h}{l}x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$