知识, 技巧与想象力

刘克峰

浙江大学

加州大学洛杉机分校

2007年5月18日

内容

回顾：研究生阶段的学习与研究生活。

感悟：与朋友们合作的愉快经历。

收获：在杭州学习研究的一些成果简介。

对话：与同学们交流成功与失败的经验。

在国内工作三年多了，接触了许多中学生，大学生和研究生。为了吸引优秀的学生到数学中来，我与他们进行了许多的对话与交流，这引发了我从各方面对数学教育的思考。迄今已有许多文章对我们的教育体制提出批评，认为它扼杀了学生们的想象力。但我觉得我们的教育从中学起就过分强调技巧，根本没有开拓学生的知识面才是根本的弊病。见多才能识广，而没有宽广的知识面，想象力就是无源之水。在中学里，以奥数为甚的题海战术使学生忘记了做题的目的是为了理解知识，只是机械地为做题而做题，不是为个人的喜欢与好奇心。

在大学里，有些老师的知识就过于陈旧和狭窄，而且不努力学习新的知识，更不可能拓宽学生的知识面了。许多学生也动辄以能做上万道习题为荣，或者早早就把自己限制在某个狭窄的研究方向。这样的教育只能培养给别人打工的工匠，不可能培养出真正的科学家。我觉得对数学专业的学生而言，要首先拓宽眼界，不仅在数学里的各个学科之间，更包括物理等相关学科，然后再尽可能地融会贯通，激发出想象力.希望我自身的经历与体会能起到抛砖引玉的作用。

我将结合自己的治学经验讨论一下知识的重要性以及知识，技巧与想象力的关系，并讨论一下我学习研究过的几个不同的问题。从我读研究生开始，我的工作就一直围绕着物理学中出现的几何与拓扑问题。物理学家需要数学作为工具，反过来他们又借助物理理论提出数学上的猜想，虽然物理学家的推导很多时候是不严格的，但是这些猜想往往最后都被证明是正确的。这是非常令人感到惊奇的！

为了解决物理学家提出的数学猜想，我们发展了全新的数学理论，发现了不同数学分支之间意想不到的联系。这些数学上的革命又为物理学的继续发展提供了严格的理论基石。

数学和物理学的相互交织造就了科学史上的多次革命，大家熟知的有：

* 微积分与牛顿力学定律
* 广义相对论与黎曼几何

近年来的大小例子更是层出不穷，

* 量子场论与指标理论结合的椭圆亏格刚性定理
* 共形场论给出的模空间Verlinde公式
* Yang-Mills场与4维拓扑
* 陈−Simons理论与3维拓扑、纽结理论
* 弦理论中镜像对称与Calabi−丘空间的镜公式
* 陈−Simons理论、Calabi−丘空间与Gromov-Witten不变量的Marino-Vafa猜想
* 弦理论与Ricci流、3维拓扑的关系
* 镜像对称与数论的关系　　等等。

近20年数学菲尔兹奖得主的获奖工作，有一半与量子场论、弦理论有关。无论你研究哪一个方向，总会在弦理论中找到用武之地。而弦论学家们也贪婪和迫不及待地注视着数学中每一点一滴的新进展，迅速地理解并应用到他们的理论中去。这种交流激发了数学与物理学无尽的活力。这也使得我们有理由猜测：上帝根据数学公式创造了世界？但毫无疑问，数学是开启大自然的钥匙。

Witten

Vafa

要指出的是，物理学家对数学的贡献不仅仅限于预测数学结论。很多时候，他们也用严格的数学语言为我们指出数学上重要的研究对象。**Witten**和**Vafa**是两位杰出的代表，他们的数学甚至要好过绝大部分数学家。有人形容他们就像从未来时空穿梭回来的一样，只记住了未来数学支离破碎的景象，凭着记忆叙述出来，成了挑战当代数学家的猜测。

物理学家学习数学的方式也许值得我们借鉴，**Witten**他们大概从来不做数学习题，但却用最快的速度学到他们所需要的数学。哈佛大学数学教授**Taubes**曾说，“物理学家先学指标理论，然后才是黎曼几何”。我觉得我们数学家不仅要时刻留意物理学的发展，更要注意物理学家掌握知识的技巧，那就是在研究中学习，在学习中研究。

物理学家特别青睐“无穷”，甚至有时候不惜以牺牲“严格性”作为代价，比如**SL(2,Z)**对称，大**N**极限的陈-**Simons**理论，路径积分。虽然**Feynman**的路径积分还缺少严格的数学基础，该理论因其物理上的直观性和便于形式演算在现代量子物理中产生了深远的影响。正所谓“妙在无穷，美即有用”。这种不严格也给了他们无穷的想象空间。

那么我们应该如何学习数学呢？

与丘先生和杭二中学生泛舟西湖

我去美国留学时，随身只带了两本书，一本是丘成桐与**Schoen**著的“微分几何”，一本是**Gilbarg**与**Trudinger**的“二阶椭圆偏微分方程”。我想在分析与几何里大展身手，就不需要学习别的了。**1988**年**9**月底，我走进丘成桐先生的办公室，开始了我在哈佛的学习生活。他问我，想开始做研究，还是继续学更多的数学。我回答想开始做研究。可是丘先生对我说，“你要尽可能多地学习数学，因为毕业以后要想学什么新东西都不容易了。”他让我学习代数几何，代数数论，几何分析……有许多内容直到今天我仍然无法完全理解。但这却深刻影响了我的学术生涯和人生轨迹。在当上教授以后，繁重的教学和科研压力让我体会到丘先生的话是多么的语重心长。

知识与技巧，到底哪一个更加重要呢？我的观点是，对年轻人而言，知识更重要！知识让我们站得更高，看到正确的方向，因为方向错了，一切努力都不会有结果。但是也要承认，研究中关键的突破往往来自于技巧上的创新。做个比喻，一个武林高手，学了很多门派的武功，但是内功不行，就容易走火入魔。大家知道丘先生在众多数学领域都有开创性工作，得益于他极强的分析功底及广博的知识面。现在国内热衷的中学生数学竞赛，就太过于强调技巧。

其实我们的学生从中学开始就应该接受多方面知识的熏陶，让孩子多看名人传记，培养对科学的好奇心才是上上之策。我最近读的牛顿传记就写得非常精彩。正是由于好奇心，牛顿大学二年级给自己提出了几十个有关大自然的问题，为了解决它们，他发展了微积分作为基础，进而发展了三大物理定律。

下面我将联系自己的经历讨论拥有宽广知识面的重要性，数学与物理及其它学科交叉的必要性，以及与朋友学术上交流的好处。

张伟平

周向宇

我在中国科学院研究生院读书时，同学中有张伟平，周向宇，现在都成了国内最杰出的青年数学家。那时很少有机会能听到前沿的课程。我们自己组织讨论班，报告陈类，指标理论，**Mordell**猜想…开始还无法完全弄明白，但是却开阔了眼界，至少知道了什么是“好的”、值得学习的数学。

这对每个人来说都是非常重要的，我们需要培养自己对于数学的鉴赏力。如果你还是无法确信什么是好的数学，那么就去读大数学家的著作和文章，跟着大师走总是没错的。后来在我研究中成为重要工具的局部化思想也是在国内学习与做硕士论文期间掌握的。后来我用局部化思想来理解我所学到的一切数学知识，就像用一根线串起了许多珠子。

从我来到哈佛大学开始，让我感触最深的就是那里教授和学生勤奋工作的作风。现在国内最缺少的正是这样一种风气。一流的大学其实就是这样一流的氛围。而推动他们如此投入的是对数学的好奇与热爱和对知识的渴求。哈佛举办各种讨论班，参加的学生非常积极，座位不够了，甚至会坐在地上。我感觉好像一头扎进了知识的海洋，每个早晨都感受到不同的阳光，那是非常令人兴奋的日子。

Witten的文章“超对称与**Morse**理论”，对我的工作影响是最大的，**Witten**把超对称量子场论解释为无穷维流形的**Hodge-de Rham**理论，其思想的独具匠心和鬼斧神工用“乾坤大挪移”来形容再恰当不过了。还有哈佛大学教授**Bott**“厚积薄发，举重若轻”的研究风格也令我颇多受益。**Bott**说过，“要顺流而下，不要逆流而上”。就是说好的方法能使你做数学象躺在船上顺流而下，不需要太费劲，太勉强。要追求“轻舟已过万重山”般的流畅。但也不要随波逐流，否则就谈不上创新。

数学上的每一次变革都离不开新的思想与方法，以及不同分支学科的融会贯通。在历史上方法的本质变革往往使困难的问题变成练习题。无论做那一门科学我们必须努力跟上并参与大的变革。这就要求我们在掌握丰富知识的基础上更具创造性地思考问题，才能在数学发展的前沿占有一席之地。数学与物理的交互作用无疑将是今后相当长时间里数学研究的主流分支。

几个学科之间相互交叉的例子

* 微积分与线性代数结合创造了微分几何；
* **Faltings**用综合代数数论与代数几何的**Arakelov**理论证明**Mordell**猜测；
* 从对称函数或更一般的，从紧群表示论出发，可以得到陈类，**K-**理论，**Riemann-Roch**公式和指标理论；
* 集模形式，表示论和拓扑于一体的椭圆亏格；
* 物理学家揭示的弦论中的各种对偶性在数学上的许多应用；

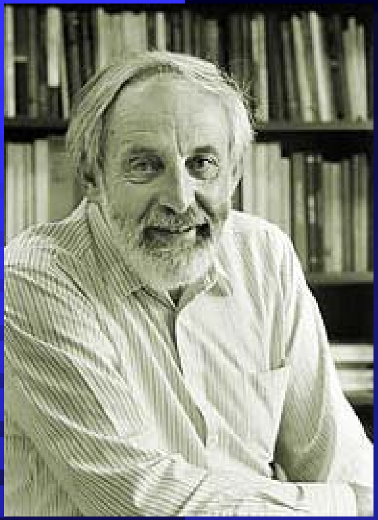
等等。

数学家对整个社会和人们的日常生活都有很大的贡献。从计算机、互联网，到生命科学、金融业，处处可见数学的踪影。尽管目前在美国找工作不容易，华尔街还招大量的数学系毕业生，培训三个月就能胜任。诺贝尔经济学奖获得者中也有好几位是数学家。在生物学界也有数学出身的诺贝尔奖获得者。

可以说，数学是最无私、最有潜力的专业。进可努力成为大科学家，退可过有质量的生活。数学要转到别的专业很容易，但反过来，别的专业要转到数学可就不容易了，数学可以给你很好的逻辑思维训练，即使以后不做数学了，也可以在别的领域做得很好。

这是单程车票。我在北大数学系的**150**个同学，虽然现在做纯数学的就我一个，但他们现在生活得也都很好。

爱因斯坦说过，“想象力比知识更重要”。可是没有深厚的知识底蕴，想象力也只能是空中楼阁。想象力就是将各种知识融会贯通而激发出的火花。所谓“天才”，就是脑袋里时刻放着七八个问题，在阅读文献的同时，不断用新学到的技巧和方法来分析这些问题，看能否找到突破，只要用心坚持，总能解决掉其中两三个问题，那么别人就会觉得你是天才了。



Bott

Taubes

我的博士论文主要研究椭圆亏格，它是指标理论和模形式的结合体，可以看作环路空间上的指标理论。在**Witten**受到量子场论启发提出椭圆亏格的刚性猜想以后，**Bott**和**Taubes**花了很大精力研究这个问题，可是他们给出的证明技巧性太强，很复杂。我参加了哈佛和**MIT**关于椭圆亏格的讨论班。我注意到环路空间上椭圆算子在模群**SL(2,Z)**作用下的对称性，接下来用了几个月时间给出了刚性猜想的一个极其简洁的证明，其中用到数论中的**Jacobi-theta** 函数和模形式。**SL(2,Z)**对称性也是弦论中的基本原理。

与浙江同人乒乓球队城运会冠军饶静文的友谊赛
张怡宁在场下观战

这个证明的思想最初萌发于去普林斯顿参加乒乓球比赛的路上，最后一步证明的豁然开朗则是产生在看一部电影的时候。记得开始的几次证明总是有漏洞，我苦恼至极。但我坚定地相信这么美妙的思想一定是对的，不然数学就一点都不有趣了，也许我也早就放弃做数学了。这就是我多方面学习培养的数学感觉在起关键作用了。

后来我继续推广了刚性定理，使之与无穷维李代数结合到一起。我不仅通过这新的方法发现了新的消灭和刚性定理，还凭借数论和代数几何的知识，通过模曲面的几何来理解刚性现象。这些方法现在仍然非常有用，完全超出了我的预期。这全新的方法也引发了我与麻晓南，张伟平及董崇英等朋友的合作，将顶点算子等理论与椭圆算子的刚性结合到一起。

我研究生涯的第一步正是得益于广泛的知识积累。数论的知识却用到了拓扑之中。在研究的过程中，我也更加深了对所学知识的理解。哈佛几年的学习，我觉得最重要的收获是开阔了眼界，提高了对“好的数学“的感觉和把握能力。

80年代末，物理学家Verlinde在研究2维共形场论时提出了著名的计算黎曼面上稳定丛模空间的典则线丛的全纯截面维数的猜测，即Verlinde公式，这是一个90年代初非常热门的研究专题。黎曼面上稳定丛的模空间在数学的许多分支中都有研究，特别是代数几何与拓扑学。数学家尝试了很多办法计算其上典则线丛的全纯截面维数，但都失败了。可是弦论学家却出人意料的给出了一个非常简洁的闭公式。

不久**Witten**在研究二维规范理论时提出了一个关于黎曼面上主丛的模空间上相交数闭公式的猜测，原则上**Witten**公式结合**Riemann-Roch**公式或者指标公式就可以得到**Verlinde**公式。当时我在**MIT**任教，参加了许多关于这方面问题的讨论班，尝试了许多不同的方法来理解**Witten**公式，这是一个对紧李群所有不可约表示求和的无穷和式。那段时间我对辛几何也有了较深刻的理解。

直到有一天在**MIT**的图书馆里，我和往常一样翻阅感兴趣的文献，不经意间看到了李群上热核的表达式，是由一个与**Witten**公式相同类型的无穷和式给出的。我立刻确信自己找到了证明**Witten**公式的工具，就是李群的热核。有了思想只是第一步，还有许多技巧上的困难需要克服，我用了几个月时间才写下了全部的证明细节，而所学的辛几何知识也起到了极其关键的作用。

受到我的工作激励，**Bismut**得以用我的方法给出了一般**Verlinde**公式的证明。

“研究”的英文单词“**research**”，就是反复寻找，很好的体现了研究的本质。丘成桐与杨振宁先生都有常在图书馆翻阅杂志的好习惯，不求懂，只为见多识广。丘先生更以“好读书，而不求甚解”作为广泛猎取知识的好方法。与其他学科一样，数学的每一点进步都是建立在前人工作基础之上的。可谓“开卷有益”！

1996年我接到斯坦福大学聘书，就在我将要驱车离开波士顿前的一小时，丘成桐先生打电话来要和我谈论有关镜像对称的问题。1990年英国物理学家Candelas等人在镜像对称的基础上，提出了五次Calabi-丘空间上有理曲线计数公式的猜测。近百年来代数几何学家都在试图计算这些有理曲线的数目，却只能得到不超过3次的有理曲线数目。而Candelas的公式通过计算一个很简单的常微分方程，即Picard-Fuchs方程，便给出了任意次数有理曲线的数目，引起很大的轰动，镜像对称也由此而发展成为近年来数学中的主流。

许多数学家尝试证明这个公式，包括**Witten, Kontsevich**，**Givental**等著名数学家都作出了贡献。我先前并未特别关注镜像对称这个研究领域，于是开始加倍努力的阅读文献。有时候冥思苦想多日却不得其解，甚至会在经历繁复的计算后换取一个“此路不通”的经验。后来在不经意间，当我注意到稳定映射模空间上的递归结构的重要性时，问题好像一下子豁然开朗了，这种美妙的感觉是旁人很难体会的。

很快，丘成桐、连文豪和我就给出了Candelas镜像猜想的第一个完整证明。证明的关键是“函子局部化”技巧，这在我今后的研究工作中也是一个非常重要的工具。此后我们又一起将镜像定理推到极其广泛的情形。这是一次非常愉快的合作，我们彼此的特长相互结合在一起，使困难的问题很快地得到解决。

我在UCLA的这些年中在研究上有很多收获，我们还证明了Grassmann流形的Hori-Vafa镜像猜测。其中除了函子局部化公式外，还要用到很复杂的组合技巧与代数几何，这些困难是在与刘剑豪讨论后才得以克服的。剑豪的刻苦和不惧一切困难的勇气都给了我深刻的印象。所以与好朋友，特别是彼此了解对方工作与能力的朋友交往是很重要的。

90年代初，**Kontsevich**证明了**Witten**的一个著名猜测并由此获得**Fields**奖，即代数曲线模空间上某些陈类积分（称为**Hodge**积分）的生成级数满足无穷多个**KdV**型的微分方程。我很早就开始关注**Kontsevich**的这项工作以及相关的发展，而且镜像对称在高亏格的推广也需要计算更广泛的**Hodge**积分。**2001**年**Marino**和**Vafa**从**Chern-Simons**理论和**Calabi-Yau**空间的对偶关系出发，猜测曲线模空间上一类更广泛**Hodge**积分的生成级数可以表达为关于对称群表示的组合闭公式，也就是**Chern-Simons**纽结不变量。

我在浏览众多物理文献时看到这个猜测，立刻就被它的漂亮吸引住了，并且意识到需要先在组合方法上找到突破口。**2002**年暑假，正值国际数学家大会在国内召开，我与周坚在北京到杭州，上海到北京的飞机上讨论了许多例如镜像对称方面的问题以及**Marino-Vafa**猜想。此后又继续通过电子邮件进行了许多富有成果的讨论。

不久，周坚理清了**Marino-Vafa**公式中的组合部分，即对称群表示的组合公式。他注意到这个组合公式满足一个所谓的“切割－连接”方程。因为这个“切割－连接”方程等价于一组常微分方程，由解的唯一性定理，我们需要证明**Marino-Vafa**公式中的几何部分，即**Hodge**积分的生成级数也满足这个“切割－连接”方程，同时与组合部分具有相同的初值。这却要困难得多，因为几何表达式的结构极其复杂，不象组合表达式那样直截了当，是已知的，并且可以直接验算。

Marino-Vafa公式几何部分的证明进行得相当的曲折和困难，我们用函子局部化技巧作了许多尝试。2003年4月，刘秋菊来到加州大学洛杉矶分校，参加了我主持的讨论班，我把我们的研究进展告诉刘秋菊。记得我们三个人当时曾被极其复杂的表达式困惑住，百思不得其解，甚至曾经想到放弃而只写下部分结果。

中国人的优势就是韧性

最后刘秋菊从Lake Arrowhead赶回来与我讨论，做无奈的最后一试，用了类似我们证明镜公式的办法，居然成功！那一刹那的感觉是非常令人难忘的。当这个猜想被证明时，真有一种天地人合一的感觉，那是一种灵魂激荡的美妙感觉。证明的预印本于2003年6月发表，在国际上引起了很大的反响。这是一次极其愉快的合作经历，三个朋友的长处得到了最完美的结合与发挥，也是可遇不可求的美好经历。

Marino-Vafa公式与**Witten-Kontsevich**的公式相比，不但前者的**Hodge**积分更加广泛，而且**Marino-Vafa**公式是一个非递归的闭公式。更重要的是，我们的证明是几何方法与组合技巧的美妙融合，对今后类似公式的证明都具有方法论上的很好借鉴。

我们继续用我们的方法建立了数学拓扑顶点理论。许多更有意思的结论可由此推出，包括我们建立的与指标理论的联系及我的学生彭攀用这新的理论证明了圈形**Calabi-**丘流形上著名的**Gopakumar-Vafa**猜想。就像**Atiyah**讲的，中国数学家在数学物理这个最有影响的主流领域可以说是一直引领风骚。周坚与刘秋菊也成为此领域中公认的一代青年领袖。

近朱者赤，和一群聪明的人在一起，你会变得更聪明。

黎曼面的模空间和**Teichmuller**空间的几何是一个古老的问题。从**Ahlfors**起至少有十几位**Fields**或**Wolf**奖获得者的工作与模空间的几何或拓扑有关。丘成桐在**80**年代初期与郑绍远、莫毅明合作证明**Teichmuller**空间上**Kahler-Einstein**度量的存在性。之后他猜测黎曼面的**Teichmuller**空间上的**Kahler-Einstein**度量与经典的**Teichmuller**度量、**Bergman**度量等价。

最近，通过引进并详细研究两类全新的完备度量，即**Ricci**度量与摄动**Ricci**度量，丘成桐、孙晓峰和我证明了丘成桐的猜测。而且还证明了所有经典的完备度量都与我们新引进的度量是等价的，这澄清了这个领域里的许多老问题。更重要的是我们进一步得到了模空间的对数余切丛是稳定的代数几何结果。这个结果至今代数几何学家仍不知如何下手。

在我还是学生时，我就对模空间和**Teichmuller**空间的几何问题有浓厚的兴趣。因为它牵涉到各种各样的数学知识。我参加各种讨论班，还写了两篇论文，用模空间上的**Weil-Petersson**度量的曲率性质证明了代数几何中的几个重要结果。我认为这是学习一门新课程最行之有效的方法，比做习题有益的多，理解问题和概念也深刻的多。

孙晓峰是我在斯坦福任教时结识的，当时他是**Schoen**的博士生，跟我上一些读书课。他人很聪明而且坚持不懈，这是难得的数学家素质。我们与丘先生一起在黎曼面模空间问题上进行了许多卓有成效的讨论，使得这项工作得以顺利完成。我们的工作对于黎曼面模空间几何学是很重要的贡献。我们还在继续研究许多很有意思的问题，许多新的结果很快会写出来。

陈-Simons与拓扑弦对偶

最近我与我的学生与朋友彭攀完成了超弦理论中 Labastida-Marino-Ooguri-Vafa猜想的证明。这是弦对偶理论中重要的猜想之一，把两个完全不同的理论等同起来。

此猜想给出了扭结不变量全新的代数结构与无穷多新的整数不变量。结果美妙惊人！

超弦理论为数学，特别是几何与拓扑学提供了无尽的问题，激发了无尽的活力。

问渠哪得清如许，为有源头活水来

——— 朱熹

模空间的相交数

模空间上的相交数是代数几何，超弦理论中极为重要的不变量，它吸引了众多一流数学家与物理学家。短短两年，我在杭州的学生与朋友们在这个问题上取得了一系列的好结果。徐浩与我发现并证明了一系列相交数崭新，非常有效的递推公式。能够在短短两年里在竞争激烈的领域，从一个学生走到世界前列，徐浩的刻苦与独一无二的计算机能力得到了应有的回报。

我希望在数学中心为优秀的学生们营造我当年在哈佛的学习与研究氛围。学生们也极大地促进了我的学习与研究。好的老师是学生的福分，好的学生也是老师的造化。

双曲几何流

这半年来我在杭州与孔德兴教授等一起开辟了一个崭新而且有趣的研究方向：双曲几何流。

它把微分几何中的**Ricci**流与广义相对论中的**Einstein**方程联系在一起。一些令人兴奋的结果正在展现出来。

德兴是双曲方程的专家，与我的专业几何拓扑结合起来，产生了意想不到的结果！我的几位学生与博士后也正在这个领域里大显身手。

杭州是个激发灵感的美丽城市。

双曲流大有用武之地

双曲几何流在理解Einstein方程的奇性，寻找时空结构的精确解，了解Penrose 猜想，宇宙奇点，大爆炸，黑洞等问题上都会有应用。

在数学上，我们可以用它来了解丘成桐教授关于渐近平坦空间的一些猜想。

这是我和朋友们开创的一个双曲乐园！

- 椭圆方程

$$\Delta u = 0$$

- 抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

- 双曲方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

(M, g) — Riemannian流形.　R_{ij} ： Ricci曲率张量

— Einstein流形：　（椭圆）

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}$$

- 几何学家

— Ricci流：　（抛物）

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

- R. Hamilton, G. Perelman

— 双曲几何流 （双曲）

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} = -2R_{ij}$$

- 孔德兴，刘克峰

我的学生们的工作，从双曲流中推导而出。
他们在研究中学习，在学习中研究。
数学中心已形成了良好的学习研究氛围。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - e^{-u}\Delta u = -2u_t^{\,2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = -\psi_t^{\,2}$$

物理学应用

Einstein 方程

$$G_{\mu\nu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(x,t)dx^i dx^j \qquad \text{（时轴正交系）}$$

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} = -2R_{ij} + \text{(lower order terms)}$$

- Einstein 方程：时轴不正交，4个约束条件
- 双曲几何流：时轴正交系，无任何约束

寻找Einstein方程的精确解

$$ds^2 = \rho(t)\left(\frac{1}{1-\kappa r^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2\right)$$

$$\rho(t) = \frac{\kappa}{2}t^2 + vt + c$$

特别当c = 0.

—宇宙奇点。

— Penrose 猜想。

- ODE方法
- Killing向量场方法
- PDE方法（我们从双曲流找出的新方法）

通过上面的讨论，希望大家已经能够感受到知识的重要，而要获取知识，惟有勤奋，而且与朋友多交流，共同创造一个好的探讨和吸收知识的氛围。宽广的知识面使我们能够正确地选择和提出有意义的问题，把握正确的研究方向，培养出对“好的数学”的敏感和洞察力。这种能力远比掌握几个解题技巧来得重要，是真正的科研能力。

学生们也不应过分限制自己的领域，要解决的问题需要什么知识就要去努力获取。另一方面，读懂一篇文章，我们会有成就感，但那只是看别人唱戏，我们需要发展自己的技巧来解决问题。当知识和技巧插上想象力的翅膀，你会发现数学的一切都变得那么美妙。

作为老师，最开心是看到学生们成长为一流的数学家。

我一直相信大自然都是可以用数学公式来描述的，所以说数学的力量是无穷的。长期以来，数学已经成了我生活的一部分，是数学的魅力在牵着我走。从某种意义上讲，数学就是人生的一种感觉，这种感觉只有在宽阔的知识海洋里徜徉才能欣赏得到，这种难以言状的美妙感觉真是好极了！

谢谢大家！