陈省身在几何上的贡献

丘成桐

5 月 13 日 哈佛大学
纪念陈省身几何学国际会议

嘉当（E. Cartan）是微分几何的祖父！

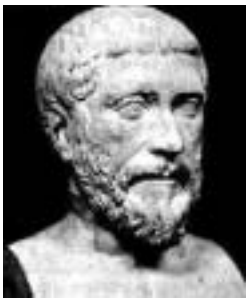
陈省身是现代微分几何之父！

他们合力创造了一门美妙而丰富的学科，影响遍及数学与物理的每个分支。

在去世前，陈说他就要去见古希腊的那些伟大的几何学家了。

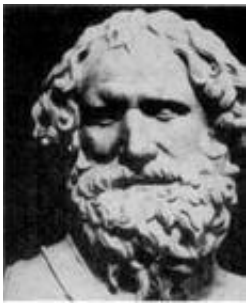
毫无疑问，他的成就堪与这些大几何学家比肩。

几何学发展史上的重要事件：



毕达哥拉斯：　毕达哥拉斯定理。
（约公元前 580－500）

欧几里德：　　欧氏几何公理。
（约公元前 330－275）



阿基米德：　　无穷过程，圆锥曲线。
（约公元前 287－212）

笛卡尔：　　引入坐标，诞生解析几何，代数与几何走向融合。
（1596－1650）

笛沙格：　　射影几何。
（1591－1661）

费马：　　变分原理。
（1601－1665）

牛顿：　　微积分。
（1642－1727）

莱布尼兹：　　微积分
（1646－1727）

欧拉：　　组合几何，变分法。
（1701－1783）

高斯：　　内蕴几何。
（1777－1885）

黎曼：　　1854 年在为取得教师职位所作的演讲中提出了黎曼几
（1826－1866）　何的思想。

索菲斯 · 李：　变换群，切触几何。
（1842－1899）

F．克莱因：　1872 年宣布埃尔朗根纲领，把几何定义为研究各种变换群作用下的空间。
（1847－1925）

射影直射变换群是最广泛的群。对应的几何是射影几何。主要的贡献者包括：

彭赛列（J.V. Poncelet）（1788－1867）

莫比乌斯（1790－1868）

沙勒（M. Chasles）（1793－1880）

斯坦纳（1796－1863）

其他的几何还有仿射几何与共形几何。

安德雷 · 韦伊：

几何直观真正的心理动因也许永远无法搞清。……不论如何，如果没有 **E. 嘉当、H. 霍普夫、陈省身**和另外少数几个人的几何直观，我们这个时代的数学就不会取得如此大的进展。可以肯定地说，只要数学还像以前那样发展，我们总是需要这样的人物。

现代微分几何的诞生

嘉当继高斯和黎曼之后完成了为现代微分几何奠基的工作。把他的关于李群和微分方程组不变量理论结合起来，他引入了现代规范理论。

嘉当定义了广义空间，包括了克莱因的齐性空间与黎曼的局部几何。用现代术语来说，就是“ 纤维丛上的联络 ”。这推广了列维－齐维塔平行性。

一般而言，我们有一个纤维丛 $\pi: E \to M$ ，其纤维 $\pi^{-1}(x),\ x \in M$ 是有李群 G 作用的齐性空间。一个联络就是纤维上与群 G 作用相容的无穷小移动。

格拉斯曼引入了外形式，而嘉当引进了外微分运算。他的 Pfaff 方程组理论和延拓理论创造了可以用来解决几何中等价问题的不变量。

嘉当用活动标架构造不变量的观点对陈省身有很深的影响。

H. 霍普夫

霍普夫最早从事微分拓扑的研究，比如流行上的向量场。他的学生斯蒂费推广了霍普夫的定理，得到了斯蒂费－惠特尼示性类。

1925 年，霍普夫在他的论文中研究了超曲面情形底高斯－博内定理。1932 年，霍普夫强调指出被积函数可以写成关于黎曼曲率张量分量的多项式。

这些工作深刻影响了陈省身后来的工作。

陈省身：整体内蕴几何之父

陈省身：黎曼几何及其推广有局部的特征。让我感觉很神秘的是，我们需要一个整体的空间把每个邻域接合起来。这可以用拓扑来完成。

嘉当和陈省身都看到了纤维丛在微分几何中的重要性。

当然，许多大数学家都研究过整体微分几何：

科恩－弗森（Cohn-Vossen）
闵可夫斯基
希尔伯特
外尔

可是他们的工作主要局限在三维欧氏空间中的曲面的整体性质。

陈在内蕴几何与代数拓扑之间建立了桥梁。（嘉当的工作本质上更加的强调局部，除了他在对称空间方面的工作。）

陈省身接受的教育

（清华大学）

大学本科时，他学习了：

1．库利芝（Coolidge）的书：《非欧几何》，《圆周与球面的几何》。
2．沙尔蒙（W. Salmon）的书：《圆锥曲线》，《立体解析几何》。
3．Castelnuovo 的书：《解析几何与射影几何》。
4．Otto Stande 的书：《线构造》（Fadenkonstruktionen）。

他的老师孙鏕研究射影微分几何（由魏尔钦斯基（E.J. Wilczynski）于 1901 年创立，这一领域的重要人物有富比尼，切赫（E. Cech））。

陈的硕士论文是关于射影线几何，即研究三维射影空间中所有直线组成的空间的超曲面。他研究了线汇，即线的二维子流形以及它们的通过二次线体的密切。

陈省身接受的教育

（布拉施克）

1932 年，布拉施克访问北京。他作了题为『微分几何中的拓扑问题』的演讲，主要讨论了微分同胚伪群及其局部不变量。

陈省身开始考虑整体微分几何，并且认识到代数拓扑的重要性。他读了韦布伦的书《位置分析》（Analysis Situs，1922）。

1934 年，他在汉堡跟随布拉施克学习。E. 阿廷、黑克和凯勒也在那里。布拉施克那时主要研究网几何与积分几何。陈开始研读 Seifert-Threlfall（1934）以及亚历山德罗夫－霍普夫（1935）的专著。

陈省身接受的教育

（凯勒，嘉当）

在汉堡时，凯勒在讨论班上讲解他写的小册子《微分方程组理论导引》，就是现在所称的凯勒－嘉当理论。

从 1936 年到 1937 年，陈到巴黎跟随嘉当研究活动标架法和等价方法，并且更深入研究了凯勒－嘉当理论。他在巴黎逗留了十个月，每两周与嘉当会面一次。

陈省身在 1937 年夏回到中国。他用了几年时间研究嘉当的工作。他曾说嘉当一生中的论著超过三千页。陈至少读过其中的百分之七十到八十。有一些工作他反复研读过好多次。在战争年代的孤立环境下，能够全身心地做研究真是了不起的事情。

陈省身对嘉当的评价

嘉当毫无疑问是本世纪最伟大的数学家之一，他的学术生涯体现出了一种罕见的睿智与谦逊的融合。

陈省身：1940 年，我努力研读嘉当的著作，意识到联络的概念将会发挥重要的作用，于是我写了几篇论文，对给定的几何结构配上联络。

外尔：嘉当无疑是微分几何领域仍然健在的最伟大的人物……不得不承认的是，我发现嘉当的书和他的大多数论文一样，艰深难读……

陈省身的大多数工作与等价问题有联系：

等价问题

1869：

E. 克里斯多菲、R. 李普希茨解决了黎曼几何中的等价问题，这个有着基本重要性的问题被称为“ 形式问题 ” ：

为了确定两个 ds^2 是否只相差一个坐标变换，克里斯多菲引入了现在被称为列维－齐维塔联络的协变微分。

嘉当等价问题：

给定分别在坐标 x^k, x^{*l} 下的两个线性无关的一次微分形式 θ^i, θ^{*j} ，其中 $1 \le i, j, k, l \le n$.

给定一个李群 $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ ，找到合适的条件，使得存在函数

$$x^{*i} = x^{*i}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

并且 θ^{*j} 在经过如上替换后，与 θ^i 相差 G 中的一个变换。

这个问题与局部不变量有关，嘉当给出了生成这些不变量的具体步骤。

陈省身（1932-1943）

射影微分几何：

找到子流形在射影变换群下的一族完全的局部不变量，并用与简单几何图形的密切来给出几何上的解释。

陈研究网几何、射影线几何，射影空间中子流形对的切触不变量、与孤立子理论中的贝克隆变换有关的曲面变换。

射影几何中的另一个典型问题是：

用正规射影联络研究道路结构的几何。

索菲斯 · 李的学生 Tresse 用空间 (x, y, y') 中的正规射影联络研究了由积分曲线 $y'' = F(x, y, y')$ 定义的道路

陈把上面的工作推广到 n 维。给定满足一组微分方程的 $2(n-1)$ 维曲线族，使得在每一点给定一个方向，正好有一条这样的曲线和它相切。陈定义了正规射影联络，把结论推广到子流形族。

陈省身（1940-1942）

积分几何是由克罗夫顿和布拉施克发展起来的。陈注意到这种几何可以用李群 G 的两个齐性空间来更好地加以理解。

H 与 K 是 G 的两个子群

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \swarrow & & \searrow \\ G/H & & G/K \end{array}$$

两个陪集 aH 与 bK 称为互相关联，如果他们在 G 中相交。

他推广了克罗夫顿的许多重要公式。1952 年，他用这些公式证明了庞卡莱、桑塔洛和布拉施克的运动公式。

韦伊：它把布拉施克学派的工作一举推进到更高的水平。文章所显现的非凡才能和深刻见解给我留下了很深的印象。

陈省身对普林斯顿的访问

（1943）

1943 年，陈受到韦布伦和外尔的邀请，从昆明前往普林斯顿。外尔是陈心目中的英雄。

纤维丛理论发端于嘉当和惠特尼的工作。斯蒂费－惠特尼示性类只在模 2 同调有定义。韦伊当时刚刚发表了他关于高斯－博内公式的论文，他把托德和埃格尔关于代数几何中典则类的工作告诉了陈。（这些工作秉承了意大利代数几何学派的风格，用到了一些未经证明的结果。）

陈认为他最好的工作就是给出了高斯－博内公式的内蕴证明。

F. 高斯对测地三角形证明了这个公式（1827）：

Disquistiones Circa Superficies Curvas.

他考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面，并且用到了高斯映照。

O. 博内在 1948 年把结论推广到以一条任意曲线为边界的单连通区域：

Mémoire sur la théorie générale des surfaces, J. De l'Ecole Poly. Tome 19, Cahier 32 (1848) 1-146.

戴克（W. Dyck）又把它推广到任意亏格：

Beiträge zur analysis situs, Math Annalen 32(1888) 457-512.

霍普夫把公式推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的余维数为 1 的超曲面。

C.B. 艾伦多弗（1940）和 W. 费恩雪尔研究了可以嵌入到欧氏空间中的可定向闭黎曼流形。

C.B. 艾伦多弗和 A. 韦伊（1843）在文章

The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, Trans. Amer. Math. Soc., 53 (1943) 101-129.

中把公式推广到闭的黎曼多面体，也即一般的闭黎曼流形。

可是证明仍然要用到流形到欧氏空间的嵌入。

韦伊：基于外尔和其他一些人的工作，我们的依赖于“ 管子 ”的证明虽然的确要用到（当时还不明了）球丛的构造，也就是一个给定浸入的横截丛，但不是内蕴的。

陈的证明第一次清楚地引入了内蕴丛，也就是单位长度的切向量丛上的运算，让整个领域的面貌焕然一新。

一个世纪前，高斯建立了内蕴几何的概念。陈的关于高斯－博内定理的证明开创了全新的领域。整体拓扑通过纤维丛以及切球丛上的超渡，与内蕴几何建立了联系。我们看到了整体内蕴几何揭开了崭新的一页。

利用活动标架，曲面的结构方程可以写为：

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_1$$
$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$$
$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

这里 ω_{12} 是联络形式，K 是高斯曲率。

如果单位向量 e_1 由一个整体定义的向量场 V 按如下给出：

$$e_1 = \frac{V}{\| V \|}$$

其中在$V \neq 0$处有定义。应用斯托克斯公式可以得到

$$-\int_M K\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_i \int_{\partial B(x_i)} \omega_{12}$$

其中$B(x_i)$是一个以x_i为圆心的小圆盘，并且$V(x_i) = 0$.

$\int_{\partial B(x_i)} \omega_{12}$可以用向量场$V$在$x_i$处的指标来计算。

根据 H. 霍普夫的一个定理，向量场的指标之和等于空间的欧拉数。

陈省身的证明甚至在二维情形都是全新的。

高维的证明中用到的是单位切球丛。

曲率形式Ω_{ij}是反对称的，Pfaffian 形式是：

$$Pf = \sum \varepsilon_{i_1 \cdots i_{2n}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2n-1} i_{2n}}.$$

高斯－博内公式是

$$(-1)^n \frac{1}{2^{2n} \pi^n n!} \int Pf = \chi(M)$$

为了证明高斯－博内公式，陈必须找到单位球丛上的形式Π，使得Π是Pf的提升。这就诞生了“ 超渡 ” 。

陈类

陈省身：我最早接触示性类，是由于高斯－博内公式，这是每个学过曲面论的人熟知的公式。早在 1943 年，当我给出n维高斯－博内公式的内蕴证明以后，我认识到，应用曲面论中的正交标架，那么经典的高斯－博内公式不过是高斯绝妙定理的一个整体性的结果。这个证明的代数方面是后来被称为“ 超渡 ”的构造的第一个实例，超渡注定了会在纤维丛同调论和其他一些问题中扮演基本重要的角色。

嘉当关于标架丛的工作，以及德拉姆定理都是陈

纤维丛的拓扑：

E. 斯蒂费（1936）

惠特尼（1937）
引入了斯蒂费－惠特尼示性类，只在模 2 情形有定义。

J. 费尔德保（1939）
C. 艾瑞斯曼（1941，1942，1943）
陈省身（1944，1945）
N. 斯廷罗德（1944）
研究了纤维丛的拓扑。

庞特里亚金（1942）
引入了庞特里亚金示性类。他还在 1944 年把黎曼流形的曲率与拓扑不变量建立联系（发表在 Doklady 杂志上）。这依赖于流形的嵌入，他开始并没有意识到这些不变量就是庞特里亚金类。

在高斯－博内公式的证明中，我们可以找到 k 个一般位置的向量场 $s_1,\cdots,s_k$. 他们线性无关的点构成了一个与 s_i 的选取无关的 $(k-1)$ 维闭链。这是 E. 斯蒂费的工作（1936）。

H. 惠特尼（1937）考虑了更一般的球丛的截面，从阻碍理论的角度对它们加以理解。

惠特尼注意到 $\mathbb{R}^n$ 中 q 平面组成的格拉斯曼流形 $G(q,N)$ 上的万有丛的重要性。他在 1937 年证明，流形上的任意秩为 q 的丛都可以由 $G(q,N)$ 上的万有丛经过映射 $f:M\to G(q,N)$ 来诱导。

当 N 很大时，庞特里亚金（1942）和斯廷罗德（1944）注意到映射 f 只相差一个同伦。丛的示性类按如下给出

$$f^*H^*(Gr(q,N))\subset H^*(M)$$

上同调 $H^*(Gr(q,N))$ 由 C. 艾瑞斯曼（1936）作了研究，它们可以由舒伯特胞腔生成。

陈省身：也许略带幸运，我在 1944 年注意到了一个平凡的事实，复向量丛的情形要比实的情形简单许多。因为大多数经典的复空间，如经典的复的格拉斯曼流形，复的斯蒂费流形等都是无扭的。

对复向量丛 E，陈类 $c_i(E)\in H^{2i}(M,\mathbb{Z})$.

陈用三种不同的方法加以定义：用阻碍理论，用舒伯特胞腔，以及用丛上联络的曲率形式。他证明了这些方法的等价性。

陈省身的基本论文（1946）

在文章

Characteristic classes of Hermitian manifolds

中，陈为复流形的埃尔米特几何奠定了基础。比如，他引入了埃尔米特联络的概念。

如果Ω是向量丛的曲率形式，我们定义

$$\det(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)=1+c_1(\Omega)+\cdots+c_q(\Omega)$$

用微分形式定义陈类对几何学与现代物理有极为重要的影响。

一个例子就是陈创造的超渡的概念。

超渡（Transgression）

令φ是在与向量丛相配的标价丛上定义的联络形式。那么曲率形式为：

$$\Omega=d\varphi-\varphi\wedge\varphi.$$

所以

$$\begin{aligned}c_1(\Omega)&=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}Tr\Omega\\&=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}d(Tr\varphi)\end{aligned}$$

类似的，

$$\begin{aligned}&Tr(\Omega\wedge\Omega)\\&=d(Tr(\varphi\wedge\varphi))+\frac{1}{3}d(Tr(\varphi\wedge\varphi\wedge\varphi))\\&=d(CS(\varphi))\end{aligned}$$

其中$CS(\varphi)$称为陈－西蒙斯形式，在三维流形、反常消除问题、弦理论、固

态物理中起着基本重要的作用。

在微分形式的层次上作超渡引出了同调群上的二级运算。比如，梅西乘积，这出现在陈国才关于重积分的工作中。

当流形是复的，我们记

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

在一篇重要的文章中，博特－陈（1965）发现：

存在一个典则构造的 $(i-1, i-1)$ 形式 $\tilde{T}c_i(\Omega)$，

使得 $c_i(\Omega) = \bar{\partial}\partial(\tilde{T}(c_i(\Omega)))$.

陈应用这个定理推广了高维复流形间全纯映照值分布的奈望林纳理论。

微分形式 $\tilde{T}c_i(\Omega)$ 在阿莱克勒夫理论中起了基本的作用。

唐纳森用 $i = 2$ 的情形证明了关于代数曲面上埃尔米特－杨－米尔斯联络存在性的唐纳森－乌伦贝克－丘定理。

当 $i = 1$ 时，

$$c_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(h_{i\bar{j}})$$

其中 $h_{i\bar{j}}$ 是埃尔米特度量。

右边是度量的里奇张量。第一陈形式是如此简洁，这促使卡拉比提出了他的著名猜想。

复数域上几何的简洁与美妙无论如何也不会被夸大。

陈省身（芝加哥的岁月）

在 1946 年发表了关于陈类的重要文章后，他详细研究了示性类的乘积结构。

1951 年，他与 E. 斯帕尼尔合作了一篇关于纤维丛上吉森序列的文章。他们独立地证明了托姆同构。

分裂原理

在 1953 年的文章

On the characteristic classes of complex sphere bundle and algebraic varieties

中，通过考虑以旗流形作为纤维的相配丛，陈证明了示性类可以用线丛来定义。作为一个推论，代数流形的示性类的对偶同调类包含一个代数闭链的表示。

这篇文章提供了 K 理论中的分裂原理，将其与托姆同构结合，就可以给出相配丛上陈类的定义，如同格罗登迪克后来所做的那样。

陈有着惊人的为重要几何结构创造不变量的才能，在我所认识的数学家中，无人能出其右。他在射影微分几何、仿射几何与拟凸域的陈－莫泽不变量的工作展示了他的能力。他与莱文、尼伦伯格定义的复流形上同调的内蕴范数还有待发掘。在他去世前，他的一个主要工作设想就是把嘉当－凯勒系统推广到更一般的几何情形。

陈省身：几何中复数的重要性对我而言充满神秘。它是如此优美简洁而又浑然一体。

陈总是对古代的中国数学家从未发现复数抱憾不已。令人欣慰的是，陈在复几何上影响深远的工作足以弥补过去两千年中国数学的缺憾。