II. 参量空间与志村簇

1. 希尔伯特概形

1.1. 参量空间的概念. 我们知道, 平面上过原点的直线可以用 $\mathbb{P}^1$ 中的点来进行分类, 即将直线 $ax+by=0$ 用点 $(a:b)\in\mathbb{P}^1$ 代表。若以纤维丛的观点将这一事实表达清楚就是

例 1. 令 $S=\mathbb{P}^1$ (我们可以将 S 看作一个 $\mathbb{Z}$-概形, 它的点用齐次坐标 $(X:Y)$ 表示), 则 $\mathbb{A}^2\times S\cong\mathbb{A}^2_S$ 为 S 上的平凡平面丛, 它有一个子丛

$$L=\{(x,y,X:Y)|xX+yY=0\}\subset\mathbb{A}^2_S$$

这是 S 上的一个非平凡直线丛。我们来验证 (S,L) 代表如下函子

$$\begin{aligned}&((\text{概形}))\to((\text{集合}))\\&T\mapsto\{\mathbb{A}^2\times T\text{ 中的直线子丛}\}\end{aligned}$$

给出平凡直线丛 $\mathbb{A}^2\times T\cong\mathbf{S}(O_T^{\oplus 2})$ 的一个直线子丛 L' 等价于给出 $O_T^{\oplus 2}$ 的一个可逆商层 $\mathcal{F}$。满射 $O_T^{\oplus 2}\to\mathcal{F}$ 给出 $\mathcal{F}$ 的两个生成元 $r,s\in\Gamma(T,\mathcal{F})$。由此可以定义从开集 $U_r=\{t\in T|r_t\neq 0\}$ 到 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}\cong\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ 的一个态射 f_r: $f_r^*:\mathbb{Z}[x]\to\Gamma(U_r,O_T)\cong\Gamma(U_r,\mathcal{F})$ 由 $f_r^*(x)=s/r$ 给出; 类似地可以定义从开集 $U_s=\{t\in T|s_t\neq 0\}$ 到 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x^{-1}])$ 的一个态射 f_s: $f_s^*:\mathbb{Z}[x^{-1}]\to\Gamma(U_s,O_T)\cong\Gamma(U_s,\mathcal{F})$ 由 $f_s^*(x^{-1})=r/s$ 给出。将 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ 和 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x^{-1}])$ 分别看作 $S=\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ 中的开集 $\{X\neq 0\}$ 和 $\{Y\neq 0\}$ (即令 $Y/X=x$), 则 f_r 和 f_s 在 $U_r\cap U_s$ 上一致, 它们粘起来给出一个态射 $f:T\to S$。易见 f 是唯一的态射使得 $L\times_S T=L'\subset\mathbb{A}^2_T$ (即有交换图

$$\begin{array}{ccc}L' & \xrightarrow{\text{嵌入}} & \mathbb{A}^2_T\\ \big\downarrow\cong & & \big\downarrow\cong\\ L\times_S T & \xrightarrow{\text{嵌入}} & \mathbb{A}^2_S\times_S T\end{array}\tag{1}$$

这也可以表达为 f 诱导 $f^*(\ker(O_S^{\oplus 2}\to O_S(1))\cong\ker(O_T^{\oplus 2}\to\mathcal{F})$。

换言之, 任意概形上的平凡平面丛的任意直线子丛都可以由 $L\subset\mathbb{A}^2_S$ (通过基变换) 得到。故我们称 L 为*泛直线丛*, 而说 S 或 (S,L) 具有*泛性* (*universality*)。特别地, 任意域 K 上的 2 维线性空间的所有 1 维线性子空间与 S 的 K-点一一对应。但注意这个一一对应并不能决定 $S\otimes K\cong\mathbb{P}^1_K$ 的几何结构, 只有从纤维丛的观点 (或等价的观点如函子的观点) 才能完全解释 S 的几何结构的意义。用分类学的术语, 我们称 S 为平面中直线的*精细参量空间* (*fine moduli*)。

为准确起见我们用下述术语。一个范畴 $\mathfrak{C}$ 上的一个*集合预层* (简称*预层*) 是一个从 $\mathfrak{C}$ 到 ((sets)) 的反变函子。预层的"态射"指的是自然变换。所谓 Yoneda 引理说, 若 F 是 $\mathfrak{C}$ 上的预层, $X\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, 则有自然一一对应 $\mathrm{Tran}(\underline{X},F)\simeq F(X)$ (其中 $\underline{X}=\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)$)。设 F 是 $\mathfrak{C}$ 上的预层, 若存在 $X\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ 使得 $F\simeq\underline{X}$, 则称 F 为*可代表的*, 由 X 代表。由 Yoneda 引理可知, 给定一个关系 $F\simeq\underline{X}$ 等价于给定一个 $\xi\in F(X)$, 使得对任一 $\alpha\in F(A)$ $(A\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}))$, 存在唯一态射 $f:A\to X$ 使得 $\alpha=F(f)(\xi)$。我们可以用另一种方式说明可代表性: 令 $\mathfrak{F}$ 为所有对 (A,α) $(A\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}),\ \alpha\in F(A))$ 组成的范畴, 其中的一个态射 $(A,\alpha)\to(B,\beta)$ 是指一个态射

$f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ 使得 $F(f)(\beta)=\alpha$。则易见 F 由 X 及 $\xi \in F(X)$ 代表当且仅当 (X,ξ) 是 $\mathfrak{F}$ 的一个终止对象。我们说 (X,ξ) (或 X) 具有泛性。

定义 1. 设 $\mathfrak{C}$ 为概形范畴 $\mathfrak{Sch}$ 或其子范畴 (如一个基 S 上的概形范畴 $\mathfrak{Sch}_S$, 或仿射概形组成的子范畴)。设 F 是 $\mathfrak{C}$ 上的预层。若 F 是可代表的, 则称其代表为 (F 的) 精细参量空间 (*fine moduli space*) 或精细参量概形 (*fine moduli scheme*)。若存在概形 X 使得存在自然变换 $\Phi: F \to \underline{X}$, 满足条件

i) 对任意代数闭域 k 使得 $\mathrm{Spec}k \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, $\Phi(\mathrm{Spec}k): F(\mathrm{Spec}k) \to \underline{X}(\mathrm{Spec}k)$ 是一一对应;
ii) 对任意概形 X' 及任意自然变换 $\Phi': F \to \underline{X'}$, 若对任意代数闭域 k 使得 $\mathrm{Spec}k \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, $\Phi'(\mathrm{Spec}k): F(\mathrm{Spec}k) \to \underline{X}(\mathrm{Spec}k)$ 是一一对应, 则存在唯一态射 $f: X \to X'$ 使得 $\Phi' = \Phi_f \circ \Phi$, 其中 $\Phi_f: \underline{X} \to \underline{X'}$ 是 f 所对应的自然变换 (见 Yoneda 引理),

则称 X 为 F 的粗糙参量空间 (coarse moduli space) 或粗糙参量概形 (coarse moduli scheme)。

显然任何精细参量空间都是粗糙参量空间。我们注意, 这个定义说明了参量空间的几何结构的意义, 而且预层 F 唯一决定其 (精细或粗糙) 参量空间的结构。

例 1 中的 S 是精细参量空间, 引言中的 $\mathcal{A}_1$ 是粗糙参量空间, 而对 $n>2$, $\mathcal{A}_{1,n}$ 是精细参量空间。

注 1. 设 $T \to S$ 为概形的态射, F 为 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层, 记 F_T 为 F 在 $\mathfrak{Sch}_T$ 上的限制。若 F 有精细参量概形 X, 则由抽象废话, $X \times_S T$ 为 F_T 的精细参量概形。例如, 设 k 为域, 定义 $\mathfrak{Sch}_k$ 上的预层 F: $T \mapsto \{\mathbb{A}_k^2 \times_k T$ 中的直线子丛$\}$, 则由例 1 可知 F 由 $\mathbb{P}_k^1$ 代表, 换言之 $\mathbb{P}_k^1$ 是 $\mathbb{A}_k^2$ 中直线的精细参量空间。

在代数几何的分类学中, 经常要考虑某一 (连续) 类对象的参量空间是否存在, 如果不存在, 我们仍要探索是否可以对该类对象加上一些影响尽可能小的附加结构 (例如前面提到的 level n-结构, 以及极化等), 使得参量空间存在。

1.2. 一些基本的精细参量空间.

例 2. 我们来看例 1 的一个推广。

将例 1 的讨论法简单推广就得到 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ 代表函子

$$\begin{aligned} ((\text{概形})) &\to ((\text{集合})) \\ T &\mapsto \{\mathbb{A}_T^{n+1} \text{ 中的直线子丛}\} \end{aligned}$$

也代表函子

$$\begin{aligned} ((\text{概形})) &\to ((\text{集合})) \\ T &\mapsto \{\mathbb{A}_T^{n+1} \text{ 中的 } n \text{ 维子向量丛}\} \end{aligned}$$

令 $X=\mathbb{P}^n$ (齐次坐标为 $X_0,...,X_n$), $Y=\mathbb{P}^n$ (齐次坐标为 $Y_0,...,Y_n$), $V \subset X \times Y$ 由方程 $X_0Y_0+...+X_nY_n=0$ 给出。对任意概形 S, 将 $X \times S$ 看作 S 上的平凡 n 维射影空间丛, 令 $F(S)=\{X \times S$ 的射影超平面子丛$\}$, 这样定义了 $\mathfrak{Sch}$ 上的一个预层 F。不难验证 F 由 (Y,V) 代表, 故 $\mathbb{P}^n$ 也是 n 维射影空间中的超平面的精细参量空间。特别地, $\mathbb{P}^2$ 是射影平面中的直线的精细参量空间。

为方便起见我们将用下面的术语: 设 $\pi: X \to S$ 为概形的态射, X 上的两个可逆层 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ 称为在 S 上局部同构的, 如果存在 S 上的可逆层 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{L}' \cong \mathcal{L} \otimes_{O_X} \pi^*\mathcal{F}$。特别地, 若 $\mathcal{L}$ 与 O_X 在 S 上局部同构, 则称 $\mathcal{L}$ 在 S 上局部平凡。

例 3. 考虑射影平面 X 中的所有 d 次曲线。给出一条 d 次曲线 (可以是退化的) 相当于给出齐次坐标 X_0, X_1, X_2 的一个 d 次齐次多项式, 它由 $m = \binom{d+2}{2}$ 个单项式的系数决定, 两个齐次多项式给出同一条曲线当且仅当它们互为标量倍。对任意概形 S, 射影平面从 $X \times S \cong \mathbb{P}^2_S$ 中的一个 d 次曲线子丛是指一个 S-有效除子 $D \subset X \times S$ 使得 $\mathcal{L}(D)$ 与 $O_X(d)$ 在 S 上局部同构。令 $F(S) = \{X \times S$ 中的 d 次曲线子丛$\}$, 这样定义了 $\mathfrak{Sch}$ 上的一个预层 F。不难验证 F 由 $\mathbb{P}^{m-1}$ 代表, 换言之 $\mathbb{P}^{m-1}$ 是射影平面中的 d 次曲线的精细参量空间。

若考虑 4 维线性空间 W 中的 2 维子空间, 问题就要复杂些, 因为一个 2 维子空间 V 由两个向量 $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 和 $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 生成, 而 (a, b) 是有很多种选择的。不过若令 $a_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$ $(1 \le i < j \le 4)$, 则 6 个 a_{ij} 的比由 V 唯一决定。但这些 a_{ij} 并非相互独立的, 它们满足关系式

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0 \tag{2}$$

它们称为 V 的普吕克坐标。注意至少有一个 $a_{ij} \neq 0$, 例如 $a_{12} \neq 0$, 则可以选择生成元 (a, b) 使得 $a_1 = b_2 = 1, a_2 = b_1 = 0$, 这样 a, b 也就唯一确定了, 而且可由诸 a_{ij} 给出 (如 $a_3 = -a_{23}$)。由此可见 V 由 6 个 a_{ij} 的比唯一决定。反之, 若给定一组满足 (2) 的不全为 0 的 a_{ij}, 则由上述过程可以确定一个 2 维子空间 V, 其普吕克坐标为 $\{a_{ij}\}$。由此可见 4 维线性空间中的 2 维子空间与 $\mathbb{P}^5$ (其齐次坐标为 $X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34}$) 中的 2 次超曲面

$$\mathbb{G}_{3,2} : X_{12}X_{34} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23} = 0 \tag{3}$$

中的点一一对应。(3) 实际上定义了一个 $\mathbb{Z}$-概形。若用例 1 的讨论法, 即得 $\mathbb{G}_{3,2}$ 代表如下函子

$$\begin{aligned} ((\text{概形})) &\to ((\text{集合})) \\ T &\mapsto \{\mathbb{A}^4_T \text{ 中的 2 维子向量丛}\} \end{aligned}$$

推而广之, 对任意正整数 $n \ge m$, 令 $N = \binom{n+1}{m}$, $Y = \mathbb{P}^{N-1}_{\mathbb{Z}}$, 其齐次坐标为 $X_{i_1 i_2 \dots i_m}$, $0 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n$, 且对 $1, 2, \dots, m$ 的任意置换 σ 令 $X_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(m)}} = (-1)^\sigma X_{i_1 i_2 \dots i_m}$ (其中 $(-1)^\sigma$ 当 σ 为奇置换时为 -1 而当 σ 为偶置换时为 1, 而令脚标有两个相同数的坐标为 0)。定义 Y 中的闭子概形

$$\mathbb{G}_{n,m} : \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k X_{i_1 \dots i_{m-1} j_k} X_{j_1 \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_{m+1}} = 0 \quad (\forall i_1, \dots, i_{m-1}, j_1, \dots, j_{m+1}) \tag{4}$$

称为格拉斯曼空间 (Grassmannian), 它代表如下函子

$$\begin{aligned} ((\text{概形})) &\to ((\text{集合})) \\ T &\mapsto \{\mathbb{A}^{n+1}_T \text{ 中的 } m \text{ 维子向量丛}\} \end{aligned}$$

换言之, $\mathbb{G}_{n,m}$ 是 $n+1$ 维线性空间中 m 维线性子空间的精细参量空间。注意 $\mathbb{A}^{n+1}$ 中的 m 维线性子空间相当于 $\mathbb{P}^n$ 中的 $m-1$ 维射影子空间, 故 $\mathbb{G}_{n,m}$ 也代表函子

$$\begin{aligned} ((\text{概形})) &\to ((\text{集合})) \\ T &\mapsto \{\mathbb{P}^n_T \text{ 中的 } m-1 \text{ 维射影子空间丛}\} \end{aligned}$$

换言之, $\mathbb{G}_{n,m}$ 是 n 维射影空间中 $m-1$ 维射影子空间的精细参量空间。不难看出 $\mathbb{G}_{n,m}$ 也是 $n+1$ 维线性空间中 $n-m+1$ 维线性子空间的精细参量空间, 以及 n 维射影空间中 $n-m$ 维射影子空间的精细参量空间。

1.3. 希尔伯特概形. 下面我们进一步考虑 $\mathbb{P}^n$ 的所有代数子空间 (即由齐次坐标的齐次多项式方程组定义的子空间)。

设 k 为代数闭域, $Y \subset \mathbb{P}_k^n = X$ 为闭子概形, 则可取充分大的 r 使得 Y 由一组 r 次齐次多项式 $f_1, ..., f_m \in [X_0, ..., X_n]$ 定义 (其中 $X_0, ..., X_n$ 为 X 的齐次坐标)。令 $M_r = \Gamma(X, O_X(r)) \cong k^{\oplus l_r}$, 其中 $l_r = \binom{n+r+1}{r}$, 且令 $M' = (f_1, ..., f_m) \subset M_r$。不妨设 $f_1, ..., f_m$ 在 k 上线性无关, 则 $\dim_k(M_r/M') = l_r - m$, 故 Y 对应于 $\mathbb{A}_k^{l_r}$ 的一个 $l_r - m$ 维线性子空间, 从而对应于 $\mathbb{G}_{l_r-1,m} \otimes k$ 中的一个点。反之, $\mathbb{G}_{l_r-1,m} \otimes k$ 中的任一个点可给出一个 m 维子空间 $M' \subset M_r$, 从而给出一个闭子概形 $Y \subset X$。但是, $\mathbb{G}_{l_r-1,m} \otimes k$ 中不同的点给出的 Y 一般不是都具有相同的离散不变量 (如维数), 所以我们得不到 $\mathbb{G}_{l_r-1,m} \otimes k$ 上的一个纤维丛, 故由此还不能得到参量空间。

为了固定离散不变量, 我们还需要对 Y 作些限制。对此有两种基本的方法, 一是周炜良的固定 Y 的维数和次数的方法, 另一是固定 Y 的希尔伯特多项式的方法。我们下面采用后一方法, 它的优点是适用于任意闭子概形 Y (而前一方法对 Y 有所限制, 可以是任意代数簇)。

由射影代数几何我们知道, 若 $S = \mathrm{Spec}R$ 为连通诺特概形而闭子概形 $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}_S^n$ 在 S 上平坦, 则对任意 $m \gg 0$, $\Gamma(X, O_X(m))$ 生成 $O_X(m)$ 且 $i^* : \Gamma(\mathbb{P}_S^n, O_{\mathbb{P}_S^n}(m)) \to \Gamma(X, O_X(m))$ 为满射。此外, 存在整值 $\mathbb{Q}$-多项式 χ_X 使得当 $m \gg 0$ 时 $\Gamma(X, O_X(m))$ 是局部自由秩 $\chi_X(m)$ 的 (χ_X 称为 X 的希尔伯特多项式)。

我们要用到一些技术性的结果。设 k 为域, $X = \mathbb{P}_k^n$ (齐次坐标为 $X_0, ..., X_n$) 而 m 为整数。X 上的一个凝聚层 $\mathcal{F}$ 称为 **m-正则的**, 如果 $H^i(X, \mathcal{F}(m-i)) = 0$ 对任意 $i > 0$ 成立。下面的引理 1, 引理 2 和推论 1 译自 ([27, Lecture 14])。

引理 1 (Castelnuovo). 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的 m-正则凝聚层, r 为整数, 则

a) 若 $r > m$, 则 $H^0(X, \mathcal{F}(r-1)) \otimes_k H^0(X, O_X(1)) \to H^0(X, \mathcal{F}(r))$ 是满射;
b) 若 $i > 0$, $r + i \geq m$, 则 $H^i(X, \mathcal{F}(r)) = 0$;
c) 若 $r \geq m$, 则 $\mathcal{F}(r)$ (作为 O_X-模层) 由 $H^0(X, \mathcal{F}(r))$ 生成。

证. 不妨设 k 是代数闭的。为方便起见, 对一个闭嵌入 $i : Y \hookrightarrow X$ 及 Y 上的一个凝聚层 $\mathcal{E}$, 简记 $i_*\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{E}$ (注意 $i^*i_*\mathcal{E} \cong \mathcal{E}$)。

对 n 用归纳法, $n = 0$ 时结果显然。

设 $n > 0$, 我们先来说明存在 $s \in H^0(X, O_X(1))$ 使得 $\cdot s : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(1)$ 为单射。一个截口 $s = a_0X_0 + ... + a_nX_n \in H^0(X, O_X(1))$ $(a_0, ..., _n \in k)$ 在开子集 $U_i = \{X_i \neq 0\} \subset X$ 上的限制为 $a_0x_0 + ... + a_nx_n$ ($x_j = X_j/X_i$, 特别地 $x_i = 1$), $\mathcal{F}(U_i)$ 的零因子的全体等于其 (作为 $k[x_0, ..., x_n]$-模的) 伴随素理想的并 (参看 [Ma, Chapter 3] 或 [L1, V]), 而每个伴随素理想所包含的这样的线性式组成所有线性式的空间的真线性子空间。若 s 不含于这有限多个真子空间的并中, 则 s 在每个 U_i 上都不是 $\mathcal{F}(U_i)$ 的零因子, 故 $\cdot s : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(1)$ 是单射。

取定这样一个 s, 它对应于 X 中的一个超平面 H。记 $\mathcal{F}_H = \mathcal{F} \otimes_{O_X} O_H$, 则对任意整数 r 有正合列

$$0 \to \mathcal{F}(r-1) \to \mathcal{F}(r) \to \mathcal{F}_H(r) \to 0 \tag{5}$$

故得正合列

$$H^i(\mathcal{F}(m-i)) \to H^i(\mathcal{F}_H(m-i)) \to H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i-1)) \tag{6}$$

由此可见若 $\mathcal{F}$ 是 m-正则的则 $\mathcal{F}_H$ 亦然。对 $H \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ 用归纳法假设, 对任意 $i \geq 0$, 由 b) 得正合列

$$0 = H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i-1)) \to H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i)) \to H^{i+1}(\mathcal{F}_H(m-i)) = 0 \tag{7}$$

故 $H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i)) = 0$, 即 $\mathcal{F}$ 为 $(m+1)$-正则的, 从而 b) 成立。

我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(\mathcal{F}(r-1)) \otimes_k H^0(O_X(1)) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mu"] & H^0(\mathcal{F}_H(r-1)) \otimes_k H^0(O_H(1)) \arrow[d, "\tau"] \\
H^0(\mathcal{F}(r-1)) \arrow[r] & H^0(\mathcal{F}(r)) \arrow[r, "\nu"] & H^0(\mathcal{F}_H(r))
\end{tikzcd} \tag{8}$$

若 $r > m$, 由 b) 有 $H^1(\mathcal{F}(r-2)) = 0$, 故 $H^0(\mathcal{F}(r-1)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{F}_H(r-1))$, 而 $H^0(O_X(1)) \twoheadrightarrow H^0(O_H(1))$, 故 σ 是满射; 而由归纳法假设, τ 也是满射, 从而 $\nu\circ\mu$ 是满射。注意 $\mathrm{im}(H^0(\mathcal{F}(r-1)) \to H^0(\mathcal{F}(r))) \subset \mathrm{im}(\mu)$, 可见 μ 是满射, 这就证明了 a)。

取 $r \gg m$, 则 $\mathcal{F}(r)$ 由 $H^0(\mathcal{F}(r))$ 生成, 而由 a) 有 $H^0(\mathcal{F}(m))\otimes_k H^0(O_X(r-m)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{F}(r))$, 注意在每个 $U_i = \{X_i \neq 0\}$ 上, $\mathcal{F}(r)(U_i) \cong \mathcal{F}(U_i)$, 而 $H^0(O_X(r-m))$ 的元的限制为 $O_X(U_i)$ 中的元, 故 $\mathcal{F}(m)$ 由 $H^0(\mathcal{F}(m))$ 生成。由此可见 c) 成立。证毕。

引理 2. 设 χ 为一个希尔伯特多项式。存在只与 χ 有关的正整数 $N = N(\chi)$ (实际上可取 $N(\chi)$ 为 χ 的系数的一个多项式), 使得任意理想层 $\mathcal{I} \subset O_X$ 若满足 $\chi_{\mathcal{I}} = \chi$ 则为 N-正则的。

证. 仍不妨设 k 是代数闭的。令 $Y \subset X$ 为 $\mathcal{I}$ 定义的闭子概形。

对 n 用归纳法, $n = 0$ 时结果显然。设 $n > 0$, 如同引理 1 的证明, 可取 $s \in H^0(X, O_X(1))$ 使得 $\cdot s : O_Y \to O_Y(1)$ 为单射, 而 s 对应于超平面 $H \subset X$。我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{I}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & O_X(-1) \arrow[r] \arrow[d] & O_Y(-1) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r] & O_X \arrow[r] & O_Y &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

其中的行是正合的, 且 σ 是单射, 故由蛇形引理 (参看 [14, 定理 XII.1.1]) 可知 $\mathcal{I}_H \to O_H$ 是单射, 即可将 $\mathcal{I}_H$ 看作 $H \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ 的理想层。由 $\chi_{\mathcal{I}_H}(x) = \chi_{\mathcal{I}}(x) - \chi_{\mathcal{I}}(x-1)$ 及归纳法假设可知存在 $N' = N'(\chi)$ 使得 $\mathcal{I}_H$ 是 N'-正则的。由正合列

$$0 \to \mathcal{I}(r-1) \to \mathcal{I}(r) \to \mathcal{I}_H(r) \to 0 \tag{10}$$

可知当 $r \geq N' - 2$ 时有正合列

$$0 \to H^0(\mathcal{I}(r)) \to H^0(\mathcal{I}(r+1)) \xrightarrow{\rho_{r+1}} H^0(\mathcal{I}_H(r+1)) \to H^1(\mathcal{I}(r)) \to H^1(\mathcal{I}(r+1)) \to 0 \tag{11}$$

而当 $r \geq N' - i$, $i \geq 2$ 时有 $H^i(\mathcal{I}(r)) \cong H^i(\mathcal{I}(r+1))$。由于对 $r \gg 0$ 有 $H^i(\mathcal{I}(r)) = 0$ $(\forall i > 0)$, 可见当 $r \geq N' - i$, $i \geq 2$ 时 $H^i(\mathcal{I}(r)) = 0$。另一方面, 由 (11) 可见对 $r \geq N' - 2$, 若 ρ_{r+1} 不是满射则 $\dim_k H^1(\mathcal{I}(r)) > \dim_k H^1(\mathcal{I}(r+1))$; 而若 ρ_{r+1} 是满射, 由归纳法及引理 1.a) 有满射 $H^0(\mathcal{I}_H(r+1))\otimes_k H^0(O_X(1)) \to H^0(\mathcal{I}_H(r+2))$, 从而 $\rho_{r+2} : H^0(\mathcal{I}(r+2)) \to H^0(\mathcal{I}_H(r+2))$ 是满射, 由归纳法对任意 $j > 0$ 都有 $H^1(\mathcal{I}(r)) \cong H^1(\mathcal{I}(r+j))$, 故 $H^1(\mathcal{I}(r)) = 0$。这就是说, $\dim_k H^1(\mathcal{I}(r))$ 随 r 严格单调下降直到等于 0。由此可见当 $r \geq N' + \dim_k H^1(\mathcal{I}(N'-1))$ 时 $H^1(\mathcal{I}(r)) = 0$。注意

$$\begin{aligned}
\dim_k H^1(\mathcal{I}(N'-1)) &= \dim_k H^0(\mathcal{I}(N'-1)) - \chi(N'-1) \\
&\leq \dim_k H^0(O_X(N'-1)) - \chi(N'-1)
\end{aligned} \tag{12}$$

我们可以取一个只与 χ 有关的整数 $N > N'$ 使得 $H^1(\mathcal{I}(N-1)) = 0$, 从而 $\mathcal{I}$ 是 N-正则的。证毕。

推论 1. 设 $Y \subset X = \mathbb{P}_k^n$ 为闭子概形, χ 为一个希尔伯特多项式。存在只与 χ 和 χ_{O_Y} 有关的正整数 N, 使得任意理想层 $\mathcal{I} \subset O_Y$ 若满足 $\chi_{\mathcal{I}} = \chi$ 则为 N-正则的。

证. 令 $\mathcal{J}$ 为 Y 的理想层, $\mathcal{I}'$ 为 $\mathcal{I}$ 在 O_X 中的原象, 则有正合列 $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{I}' \to \mathcal{I} \to 0$, 从而 $\chi_{\mathcal{I}'} = \chi + \chi_{\mathcal{J}}$。注意 $\chi_{\mathcal{J}} = \chi_{O_X} - \chi_{O_Y}$, 由引理 2 存在只与 χ 和 χ_{O_Y} 有关的正整数 N_1 使得 $\mathcal{I}'$ 是 N_1-正则的, 且存在只与 χ_{O_Y} 有关的正整数 N_2 使得 $\mathcal{J}$ 是 N_2-正则的。由引理 1.b), 取 $N = \max(N_1, N_2)$ 即可。证毕。

引理 3. 设 S 为诺特概形, $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 为 S 上凝聚层的同态, 其中 $\mathcal{G}$ 在 S 上平坦, 则存在闭子概形 $\mathcal{N}il(f)\subset S$ 代表如下函子

$$\begin{aligned}\mathfrak{Nil}_f\colon \mathfrak{Sch} &\to ((\text{集合}))\\ T &\mapsto \{\phi\in \mathrm{Mor}(T,S)|\phi^*f=0:\phi^*\mathcal{F}\to\phi^*\mathcal{G}\}\end{aligned}$$

证. 由抽象废话不妨设 S 是仿射的。设 $S=\mathrm{Spec}R$, 取 R-模 M, N 使得 $\mathcal{F}=\tilde{M}$, $\mathcal{G}=\tilde{N}$, 其中 N 是平坦的, 则 f 由一个 R-模同态 $f_S:M\to N$ 给出。令 $M'=f_S(M)$。令 I 为所有满足 $M'\subset JN$ 的理想 $J\subset R$ 的交, 则因 N 是局部自由 R-模, 易见 $M'\subset IN$。我们来验证 $\mathrm{Spec}(R/I)$ 代表 $\mathfrak{Nil}_f$。对任意 $T=\mathrm{Spec}A$ 及任意 $\phi:T\to S$, 令 $J=\ker(\phi^*:R\to A)$, 且令 $f':M\to N/JN$ 为 f 诱导的同态, 则有交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f'} & N/JN \\ \downarrow{\scriptstyle \phi^*_M} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^*_{N/JN}} \\ M\otimes_R A & \xrightarrow{f_A} & N\otimes_R A \end{array} \tag{13}$$

其中 $\phi^*_{N/JN}$ 是单射, 因为 N 平坦。若 $f_A=0$, 则有 $f'=0$, 故 $J\supset I$, 换言之 ϕ 经过 $\mathrm{Spec}(R/I)$。证毕。

推论 2. 设 S 为诺特概形, $\mathcal{F}$ 为 S 上凝聚层, $n=\max\limits_{s\in S}(\dim_{\kappa(s)}\mathcal{F}_s)$。则存在 S 的闭子概形 $S_{\mathcal{F},n}$ 代表如下函子

$$\begin{aligned}F:\mathfrak{Sch} &\to ((\text{集合}))\\ T &\mapsto \{\phi\in \mathrm{Mor}(T,S)|\phi^*\mathcal{F}\text{ 为秩 } n \text{ 局部自由的}\}\end{aligned}$$

证. 由抽象废话问题是局部的, 不妨设 $S=\mathrm{Spec}R$, $\mathcal{F}=\tilde{M}$, 其中 M 由 n 个元生成。任取满同态 $f:R^{\oplus n}\to M$, 令 $M'=\ker(f)$。注意对任意 R-代数 A, $A\otimes_R M$ 是秩 n 局部自由的当且仅当 $\mathrm{id}_A\otimes_R f:A^{\oplus n}\to A\otimes_R M$ 是同构, 而这当且仅当 $f\otimes_R \mathrm{id}_A:M'\otimes_R A\to R^{\oplus n}\otimes_R A$ 是零映射。故由引理 3, F 由 S 的一个闭子概形代表。证毕。

为方便起见我们将用下列术语:

术语. i) 一个概形态射 $f:X\to Y$ 称为满的, 如果 f 作为集合映射是满的且 $f^\#:O_Y\to f_*O_X$ 是单射。

ii) 对任一态射 $f:X\to Y$, $\ker(f^\#)$ 是 O_Y 的理想层, 它定义一个闭子概形 $V\subset Y$, 记 $V=\overline{\mathrm{im}(f)}$, 注意此时 f 经过 V。特别地, 若 f 作为集合映射的象是闭集 (例如 f 是射影的), 则记 $V=\mathrm{im}(f)$, 称为 f 的象 (注意此时 $X\to\mathrm{im}(f)$ 为满射)。

iii) 一个态射 $X\to S$ 称为相对射影的 (或相对拟射影的), 如果 X 是某个 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ ($\mathcal{E}$ 为 S 上的凝聚层) 的闭 (或局部闭) 子概形。在这种情形我们一般固定一个同义反复可逆层 $O_X(1)$ (特别是当涉及希尔伯特多项式的时候)。

推论 3. 设 S 为诺特概形, $\pi:X\to S$ 为相对射影态射。设 $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 为 X 上的凝聚层同态, 其中 $\mathcal{G}$ 在 S 上平坦。则存在闭子概形 $\mathcal{N}il(f/S)\subset S$ 代表如下函子

$$\begin{aligned}\mathfrak{Nil}_{f/S}:\mathfrak{Sch} &\to ((\text{集合}))\\ T &\mapsto \{\phi\in \mathrm{Mor}(T,S)|(\mathrm{id}_X\times_S\phi)^*f=0:(\mathrm{id}_X\times_S\phi)^*\mathcal{F}\to(\mathrm{id}_X\times_S\phi)^*\mathcal{G}\}\end{aligned}$$

证. 对任意整数 n, 记 $\mathcal{F}_n=\pi_*\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{G}_n=\pi_*\mathcal{G}(n)$, 而令 $f_n:\mathcal{F}_n\to\mathcal{G}_n$ 为 f 诱导的同态。取 n 使得 $H^1(X_s,G_s(n))=0\ \forall s\in S$, 则 $\mathcal{G}_n$ 在 S 上局部自由。由引理 3, 存在闭子概形 $S_n\subset S$ 代表如下函子

$$\begin{aligned}\mathfrak{Sch} &\to ((\text{集合}))\\ T &\mapsto \{\phi \in \mathrm{Mor}(T,S) | \phi^* f_n = 0 : \phi^*\mathcal{F}_n \to \phi^*\mathcal{G}_n\}\end{aligned}$$

我们还可取 n 使得 $\pi^*\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}(n)$ 和 $\pi^*\mathcal{G}_n \to \mathcal{G}(n)$ 为满射。对任一态射 $\phi : T \to S$, 注意 $\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{G}(n) \cong \phi^*\mathcal{G}_n$, 且有诱导同态 $\phi^*\mathcal{F}_n \to \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{F}(n)$。若 $(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^* f = 0$, 则 $\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{F}(n) \to \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{G}(n)$ 为零同态, 从而 $f_n = 0 : \phi^*\mathcal{F}_n \to \phi^*\mathcal{G}_n$; 反之, 若 $f_n = 0$, 则 $(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{F}(n) \to (\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{G}(n)$ 为零同态 (因为 $\mathrm{pr}_2^*\phi^*\mathcal{F}_n \to (\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{F}(n)$ 是满射), 故 $(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^* f = 0$。这说明 S_n 代表 $\mathfrak{Nil}_{f/S}$。证毕。

由此立得

推论 4. 设 $X \to S$ 为有限型态射, $Y, Y' \subset X$ 为闭子概型, 其中 Y 在 S 上平坦。则存在 S 的闭子概形代表如下函子

$$\begin{aligned}\mathfrak{Sch} &\to ((\text{集合}))\\ T &\mapsto \{j \in \mathrm{Mor}(T,S) | Y \times_S T \subset Y' \times_S T\}\end{aligned}$$

(注意 $Y' \times_S T$ 和 $Y \times_S T$ 都是 $X \times_S T$ 的闭子概形)。特别地, 若 Y' 也在 S 上平坦, 则有闭子概形 $S' \subset S$ 代表函子

$$\begin{aligned}\mathfrak{Sch} &\to ((\text{集合}))\\ T &\mapsto \{j \in \mathrm{Mor}(T,S) | Y \times_S T = Y' \times_S T\}\end{aligned}$$

我们称 S' 为 Y 和 Y' 在 S 中的等化子 (*equilizer*)。

我们还将用到“平坦分层”的方法。设 $\pi : X \to S$ 为诺特概形的有限型态射, $\mathcal{F}$ 为 X 上的凝聚层, 则存在 S_{red} 的稠密开子概形 U_1 使得 $\mathcal{F} \otimes_{O_S} O_{U_1}$ 在 U_1 上平坦 (参看 [23, (22.A)] 或 [14, 习题 XVI.9]); 令 $S_1 = S - U_1$, 带有约化的诱导概形结构, 若 $S_1 \neq \emptyset$, 则存在稠密开子概形 $U_2 \subset S_1$ 使得 $\mathcal{F} \otimes_{O_S} O_{U_2}$ 在 U_2 上平坦; 再令 $S_2 = S_1 - U_2$ (带有约化的诱导概形结构), 等等。由诺特归纳法, 经过有限多步以后我们就将 S 分解为有限多个局部闭子概形 $U_1, U_2, \ldots$ (带有约化的诱导概形结构), 使得每个 $\mathcal{F} \otimes_{O_S} O_{U_i}$ 在 U_i 上平坦。这种分解称为*平坦分层* (*flattening stratification*)。

引理 4. 设 S 为诺特仿射概形, $\pi : X \to S$ 为射影态射, $\mathcal{F}$ 为 X 上的凝聚层, 则存在 N 使得对任意 $m > N$ 有

$$(\pi_*\mathcal{F}(m))_s \xrightarrow{\simeq} H^0(X_s, \mathcal{F}_s(m)) \tag{14}$$

($\forall s \in S$)。故若 $s, s' \in S$, s' 是 s 的一般化 (即 s 含于 $\{s'\}$ 的闭包中), 则对 $m > N$ 有

$$\chi_{\mathcal{F}_s}(m) \geq \chi_{\mathcal{F}_{s'}}(m) \tag{15}$$

证. 为简便起见不妨设 $S = \mathrm{Spec} R$。设 $I \subset R$ 为理想。由正合列 $0 \to I\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/I\mathcal{F} \to 0$, 可见当 $m \gg 0$ 时有正合列

$$0 \to H^0(I\mathcal{F}(m)) \to H^0(\mathcal{F}(m)) \to H^0((\mathcal{F}/I\mathcal{F})(m)) \to 0 \tag{16}$$

(参看 [5, Theorem III.5.2])。由于 R 是诺特环, 可取正整数 r 使得有 R-模满同态 $R^{\oplus r} \to I$, 从而有凝聚层满同态 $\mathcal{F}^{\oplus r} \to I\mathcal{F}$。对 $m \gg 0$, $H^0(\mathcal{F}^{\oplus r}(m)) \to H^0(I\mathcal{F}(m))$ 为满射, 而 $H^0(\mathcal{F}^{\oplus r}(m)) \to H^0(\mathcal{F}(m))$ 的象显然在 $IH^0(\mathcal{F}(m))$ 中, 故由 (16) 得

$$H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes_R R/I \cong H^0((\mathcal{F}/I\mathcal{F})(m)) \tag{17}$$

若 I 为素理想，存在 $V(I)=\mathrm{Spec}(R/I)\subset S$ 的非空开子概形 U 使得 $\mathcal{F}\otimes_{O_S}O_U$ 在 U 上平坦，故对 $m\gg 0$ 有

$$H^0((\mathcal{F}/I\mathcal{F})(m))_s\cong H^0(X_s,\mathcal{F}_s(m))\ (\forall s\in U) \tag{18}$$

由 (17) 和 (18) 即得 (14) 对 $s\in U$ 成立。由 I 的任意性，用平坦分层的方法可将 S 分成有限多个局部闭子概形 U_i (带有约化的诱导概形结构)，使得存在 N_i，当 $m>N_i$ 时 (14) 对任意 $s\in U_i$ 成立。取 $N=\max\limits_i(N_i)$ 即可使 (14) 当 $m>N$ 时对任意 $s\in S$ 成立。

若 s' 是 s 的一般化，由 (14) 立得

$$\dim_{\kappa(s)}H^0(\mathcal{F}_s(m))\ge\dim_{\kappa(s')}H^0(\mathcal{F}_{s'}(m))$$

这就是 (15)。证毕。

定理 1. 对任一希尔伯特多项式 χ，存在 $\mathbb{Z}$-射影概形 $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^n}$ 代表如下函子

$$\mathfrak{Hilb}^{\chi}_{\mathbb{P}^n}:((\text{局部诺特概形}))\to((\text{集合}))$$
$$T\mapsto\{\mathbb{P}^n_T\ \text{中的具有希尔伯特多项式}\ \chi\ \text{的}\ T\text{-平坦闭子概形}\}$$

$\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^n}$ 称为一个希尔伯特概形。

证. 记 $X=\mathbb{P}^n$, $\chi'=\chi_X-\chi$。由引理 2，存在只与 χ' 有关的正整数 N，使得任意概形 T 及任意 T-平坦闭子概形 $Z\subset X\times T$，若 $\chi_Z=\chi$ 则 Z 的理想层在 T 上的纤维都是 N-正则的。令 $m=\binom{N+n}{n}-1\ (=\chi_X(N)-1)$, $r=\chi(N)$, $S=\mathbb{G}_{m,r}$，则由三.3 S 代表秩 m 平凡向量丛的秩 r 向量子从，故有 $\mathcal{F}=H^0(O_X(N))\otimes O_S\cong O_S^{\oplus m}$ 的子层 $\mathcal{F}'$ 使得 $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 为局部自由秩 r 的泛层。令 $\pi:X\times S\to S$ 为投射，则有诱导同态 $\phi:\pi^*\mathcal{F}'\to\pi^*\mathcal{F}\to O_{X\times S}(N)$，于是 $\mathcal{I}=\mathrm{im}(\phi)(-N)$ 就是 $O_{X\times S}$ 中的理想层。记 $Y\subset X\times S$ 为 $\mathcal{I}$ 定义的闭子概形。

设 $\xi\in S$ 为一般点，则由平坦分层，存在非空开子集 $U\subset S$ 使得 $Y\times_S U$ 在 U 上平坦，从而对任意 $s\in U$ 有 $\chi_{Y_s}=\chi_{Y_{xi}}$。若 $\chi_{Y_{xi}}\ne\chi$，令 $S_1=S-U$ (带有约化诱导概形结构)。若有 S_1 的一般点 ξ' 使得 $\chi_{Y_{xi'}}\ne\chi$，取 ξ' 在 S_1 中的开邻域 U_1 使得 $Y\times_S U_1$ 在 U_1 上平坦，再令 $S_2=S_1-U_1$，等等，如此继续下去，由诺特归纳法，经过有限步后我们得到一个闭子概形 $S'\subset S$，使得对任意 $s\in S$，若 $\chi_{Y_s}=\chi$ 则 $s\in S'$，且有稠密开子集 $U'\subset S'$ 使得对任意 $s\in U'$ 都有 $\chi_{Y_s}=\chi$。

我们来说明对每个点 $s\in S'$ 都有 $\chi_{Y_s}=\chi$。由引理 4 只需考虑 s 为闭点的情形。取一个整的 1 维闭子概形 $C\subset S'$ 使得 $s\in C$ 且 $C\cap U'\ne\emptyset$，则 C 的正规化 $\tilde{C}$ 是正则的。令 $Y'=Y\times_S\tilde{C}$，$\mathcal{T}\subset O_{Y'}$ 为 $O_{Y'}$ 中的 $O_{\tilde{C}}$-零因子组成的子层，则 $O_{Y'}/\mathcal{T}$ 定义一个闭子概形 $Y_0\subset Y'$，在 $\tilde{C}$ 上平坦，故由 $C\cap U'\ne\emptyset$ 有 $\chi_{Y_0}=\chi$。令 $\mathcal{J}\subset O_{X\times\tilde{C}}$ 为 Y_0 的理想层，$s'\in\tilde{C}$ 为 s 的一个原象，则由引理 2 有 $\dim_{\kappa(s')}H^0(O_{(Y_0)_{s'}}(N))=r$, $\dim_{\kappa(s')}H^0(\mathcal{J}_{s'}(N))=m-r$。另一方面，由 Y 的定义有 $H^0(\mathcal{J}_{s'}(N))\supset H^0(\mathcal{I}_{s'}(N))\supset\mathcal{F}'_{s'}$ 而 $\dim_{\kappa(s')}\mathcal{F}'_{s'}=m-r$，故 $H^0(\mathcal{J}_{s'}(N))=\mathcal{F}'_{s'}\subset\mathcal{F}_{s'}$，从而 $(Y_0)_{s'}=Y'_{s'}$, $\chi_{Y_s}=\chi_{Y'_{s'}}=\chi$。

由引理 4 可知，对 $s\in S$，若 $\{s\}$ 的闭包与 S' 相交，则对 $t\gg 0$ 有 $\chi_{Y_s}(t)\le\chi(t)$，故若 $\chi\ne\chi_{Y_s}$ 则 $\chi-\chi_{Y_s}$ 的首项系数大于 0，此时我们简记 $\chi_{Y_s}<\chi$。由平坦分层可见 $V=\{s\in S|\chi_{Y_s}>\chi\}$ 为闭子集，而由上所述 $V\cap S'=\emptyset$。从而 $S'\subset S-V$。由引理 4，存在整数 N_0 使得对任意 $t>N_0$，$\pi_*(O_{X\times S}(t))\to\pi_*(O_Y(t))$ 是满射，且对任意 $s\in S-V$ 有 $\pi_*(O_Y(t))_s\cong H^0(Y_s,O_{Y_s}(t))$ 及 $\chi_{Y_s}(t)\le\chi(t)$，故由推论 2，有闭子概形 $S_t\subset S-V$ 代表如下函子

$$F:\mathfrak{Sch}\to((\text{集合}))$$
$$T\mapsto\{\phi\in\mathrm{Mor}(T,S-V)|\phi^*\pi_*(O_Y(t))\ \text{为秩}\ \chi(t)\ \text{局部自由的}\}$$

由诺特归纳法存在交 $S_\chi=\bigcap\limits_{t>N_0}S_t$。显然作为集合 $S_\chi=S'$，故 S_0 在 $\mathbb{Z}$ 上为射影的。令 $Y_\chi=Y\times_S S_\chi$，则由 (17) 可见可取 N_0 使得对 $t>N_0$，$\pi_*(O_Y(t))$ 在 S_χ 上的拉回同构于 $\pi_*(O_{Y_\chi}(t))$，故 $\pi_*(O_{Y_\chi}(t))$ 是秩 $\chi(t)$ 局部自由的。

令 $\mathcal{E}=\bigoplus_{t>N_0}\pi_*(O_{Y_\chi}(t))$, 视为一个 $O_{S_\chi}[X_0,...,X_n]$-模, 它显然在 S_χ 上平坦。记 $U_i=\{X_i\neq 0\}\subset Y_\chi$, 则 $\pi_*O_{U_i}$ 同构于 $\mathcal{E}$ 用 $1/X_i$ 局部化后的 0 次直加项 (参看 [5, Ⅲ.5.2]), 故也在 S_χ 上平坦, 换言之 U_i 在 S_χ 上平坦。因此 Y_χ 在 S_χ 上平坦。

我们来验证 (S_χ,Y_χ) 代表 $\mathfrak{Hilb}^\chi_{\mathbb{P}^n}$。设 T 为概形, $Y_T\subset X\times T$ 为具有希尔伯特多项式 χ 的 T-平坦闭子概形, $\mathcal{I}_{Y_T}$ 为其定义理想层, $\pi_T:X\times T\to T$ 为投射。由引理 2, $\pi_{T*}(O_{Y_T}(N))$ 为局部自由秩 $\chi(N)$ 的, $\pi_{T*}(\mathcal{I}_{Y_T}(N))$ 为局部自由秩 $\chi'(N)$ 的, 且 $\pi_{T*}(O_{X\times T}(N))\cong O_T^{\oplus m}\to\pi_{T*}(O_{Y_T}(N))$ 为满射。由 S 的泛性, 存在唯一态射 $\phi:T\to S$ 使得 $\phi^*\mathcal{F}'=\pi_{T*}(\mathcal{I}_{Y_T}(N))$ (作为 $\phi^*\mathcal{F}\cong\pi_{T*}(O_{X\times T}(N))$ 的子层)。故有交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_T^*\phi^*\mathcal{F}' & \longrightarrow & O_{X\times T}(N) & \longrightarrow & (\mathrm{id}_X\times\phi)^*O_Y(N) & \to 0 \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & \\
\pi_T^*\pi_{T*}(\mathcal{I}_{Y_T}(N)) & \longrightarrow & O_{X\times T}(N) & \longrightarrow & O_{Y_T}(N) & \to 0
\end{array}\tag{19}$$

其中的行都是正合的。由此得

$$Y_T=Y\times_{X\times S}(X\times T)=Y\times_S T\subset X\times T\tag{20}$$

由于 $\chi_{Y_T}=\chi$, 作为集合映射 ϕ 将 T 映入 S_χ, 故 ϕ 经过 $S-V$。对任意 $t>N_0$, $\psi_t:\phi^*\pi_*(O_Y(t))\to\pi_{T*}(O_{Y_T}(t))$ 是满射 (因为 $\pi_{T*}(O_{X\times T}(t))\to\pi_{T*}(O_{Y_T}(t))$ 是满射), 且由上所述可见 ψ_t 在 T 上的纤维都是同构。由于 $\pi_{T*}(O_{Y_T}(t))$ 是局部自由的, 可见 ψ_t 是同构, 故 $\phi^*\pi_*(O_Y(t))$ 是局部自由秩 $\chi(t)$ 的, 因此 ϕ 经过 S_t。由 t 的任意性, ϕ 经过 S_χ。$T\to S_\chi$ 的唯一性是显然的, 因为 $\phi:T\to S_\chi\to S$ 是唯一的。证毕。

注 1. 直接计算表明, $\mathcal{H}ilb^\chi_{\mathbb{P}^n}\subset\mathbb{G}_{m,r}$ 的定义理想层是一些 Fitting 理想层之和。

下面的一些推广也都称为希尔伯特概形。

定理 2. 设 S 为局部诺特概形而 $X\to S$ 为相对射影概形 (固定了 $O_X(1)$), χ 为整值多项式。下面涉及的函子若不特别说明, 都是从局部诺特 S-概形的范畴到集合范畴的反变函子。

i) 若 X 是 $\mathbb{P}^n_S$ 的闭子概形 ($O_X(1)$ 由 $O_{\mathbb{P}^n}(1)$ 给出), 则存在闭子概形 $\mathcal{H}ilb^\chi_{X/S}\subset\mathcal{H}ilb^\chi_{\mathbb{P}^n}\times S$ 代表如下函子

$$T\mapsto\{X\times_S T\text{ 中的具有希尔伯特多项式 }\chi\text{ 的 }T\text{-平坦闭子概形}\}$$

ii) 存在 S 上的相对射影概形 $\mathcal{H}ilb_{X/S}$, 代表函子

$$T\mapsto\{X\times_S T\text{ 中的 }T\text{-平坦闭子概形}\}$$

iii) 设 W 是 $H=\mathcal{H}ilb_{X/S}$ 上的泛子概形, 则对任意正整数 n, n 个 W 的拷贝在 H 上的纤维积 $W\times_H...\times_H W$ 代表函子

$$T\mapsto\{X\times_S T\text{ 中的 }T\text{-平坦闭子概形, 带有 }n\text{ 个截口}\}$$

iv) 设 X 在 S 上平坦而 $Y\to S$ 为相对射影概形, 则存在 $\mathcal{H}ilb_{X\times_S Y/S}$ 的局部闭子概形 $\mathcal{M}or_S(X,Y)$, 代表函子

$$\mathfrak{Mor}_{X,Y/S}:\ T\mapsto\mathrm{Mor}_T(X\times_S T,Y\times_S T)$$

若 Y 也在 S 上平坦, 则存在 $\mathcal{M}or_S(X,Y)$ 的局部闭子概形 $\mathcal{I}so_S(X,Y)$, 代表函子

$$\mathfrak{Iso}_{X,Y/S}:\ T\mapsto\{T\text{-同构 }X\times_S T\xrightarrow{\cong}Y\times_S T\}$$

特别地，存在 $\mathcal{H}ilb_{X\times_S X/S}$ 的局部闭子概形 $\mathcal{E}nd(X/S)$，代表函子

((局部诺特 S-概形))$\to$((半群))

$$T\mapsto \mathrm{Mor}_T(X\times_S T, X\times_S T)$$

而且存在 $\mathcal{E}nd(X/S)$ 的局部闭子概形 $\mathcal{A}ut(X/S)$，代表函子

((局部诺特 S-概形))$\to$((群))

$$T\mapsto \{X\times_S T \text{ 的 } T\text{-自同构}\}$$

$\mathcal{A}ut(X/S)$ 带有自然的群概形结构，称作 X 在 S 上的自同构群概形。

证. i) 由抽象废话 $H=\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^n}\times S$ 代表函子

((局部诺特 S-概形))$\to$((集合))

$$T\mapsto \{\mathbb{P}^n_T \text{ 中的具有希尔伯特多项式 } \chi \text{ 的 } T\text{-平坦闭子概形}\}$$

令 $W\subset \mathbb{P}^n_H$ 为 H 上的泛子概形。由推论 4，存在 H 的闭子概形 $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$ 代表函子

$$T\mapsto \{j\in \mathrm{Mor}(T,H) | W\times_H T\subset X\times_S T\}$$

这等价于函子

$$T\mapsto \{X\times_S T \text{ 中的具有希尔伯特多项式 } \chi \text{ 的 } T\text{-平坦闭子概形}\}$$

ii) 先考虑 S 为仿射的情形，任取一个闭嵌入 $X\to\mathbb{P}^n_S$，则显然 $\mathcal{H}ilb_{X/S}=\coprod\limits_{\chi}\mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$ 代表函子

$$T\mapsto \{X\times_S T \text{ 中的 } T\text{-平坦闭子概形}\}$$

由抽象废话，$\mathcal{H}ilb_{X/S}$ 在 S-同构之下与嵌入 $X\to\mathbb{P}^n_S$ 无关。故由抽象废话，$\mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$ 对一般的 S 也存在。

iii) 是抽象废话。

iv) 令 $H=\mathcal{H}ilb_{X\times_S Y/S}$ 而 $W\subset X\times_S Y\times_S H$ 为 H 上的泛子概形。令 $W_1=\mathrm{im}(W\to X\times_S H)$，则因 $X\to S$ 平坦，由推论 4 存在 H 的最大闭子概形 V 使得 $X\times_S V\subset W_1$。令 $W_2=W\times_H V$，$W_3\subset W_2$ 为最大开子概形使得 $\Omega^1_{W_3/X\times_S V}=0$，$U=X\times_S V-\mathrm{im}((W_2-W_3)\to X\times_S V)$，则投射 $p: W_4=W_2\times_{X\times_S V}U\to U$ 为相对射影无分歧的，因而是有限的。令 $U_1\subset U$ 为最大开子概形使得 $p^*: O_{U_1}\to p_*O_{W_4}|_{U_1}$ 为满射，$V'=V-\mathrm{im}((X\times_S V-U_1)\to V)$，则不难验证 $V'\subset H$ 是最大的子概形使得 $W\times_H V'\to X\times_S V'$ 为同构。我们来验证 V' 代表 $\mathfrak{Mor}_{X,Y/S}$。注意对任意 S-概形 T，给出一个 $j\in\mathrm{Mor}_T(X\times_S T, Y\times_S T)$ 等价于给出一个 T-平坦闭子概形 $W'\subset X\times_S Y\times_S T$ 使得 $W'\to X\times_S T$ 为同构 ($W'=\mathrm{im}((\mathrm{id}_{X\times_S T}, j): X\times_S T\to X\times_S Y\times_S T)$，即 j 的图)。这样一个 W' 诱导一个典范态射 $\phi: T\to H$ 使得 $W\times_H T=W'\subset X\times_S Y\times_S T$。由 $\mathrm{im}(W'\to X\times_S T)\subset W_1\times_H T$，有 $W_1\times_H T=X\times_S T$，故由推论 4 可见 ϕ 经过 V。再由 $W\times_H T\cong X\times_S T$ 可见 $X\times_S T=U_1\times_V T$，从而 $T\to V$ 经过 V'，而 $T\to V'$ 的唯一性是显然的。

若 $Y\to S$ 平坦，将 Y 换到 X 的地位再如上讨论，即可得到 $\mathfrak{Iso}_{X,Y/S}$ 由 V' 的一个局部闭子概形代表。令 $Y=X$，再注意 $\mathrm{Mor}_T(X\times_S T, X\times_S T)$ 具有半群结构 (乘法为合成) 而 $\mathrm{Aut}_T(X\times_S T)$ 具有群结构，即得 $\mathcal{E}nd(X/S)$ 和 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的存在性。而 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的群概形结构是抽象废话。具体说，若 σ 为 $X\times_S \mathcal{A}ut(X/S)$ 的泛自同构，则 $X\times_S\mathcal{A}ut(X/S)\times_S\mathcal{A}ut(X/S)$ 有两个自同构 σ_1 和 σ_2，分别为 σ 经 pr_{12} 和 pr_{13} 的拉回，于是自同构 $\sigma_1\circ\sigma_2$ 诱导一个态射 $m:\mathcal{A}ut(X/S)\times_S\mathcal{A}ut(X/S)\to\mathcal{A}ut(X/S)$，就是 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的乘法；X 的单位态射诱导 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的单位截口 $o: S\to\mathcal{A}ut(X/S)$；$\sigma^{-1}$ 诱导 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的逆 $\iota:\mathcal{A}ut(X/S)\to\mathcal{A}ut(X/S)$，这些态射就给出 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的群概形结构。证毕。

注 2. 由抽象废话, 定理 2 中的各参量概形都与基变换交换, 即对任意局部诺特 S-概形 T 有 $\mathcal{H}ilb_{X\times_S T/T}\cong \mathcal{H}ilb_{X/S}\times_S T$, $\mathcal{A}ut(X\times_S T/T)\cong \mathcal{A}ut(X/S)\times_S T$, 等等。

习题

1.

习题. i) 设 G 为诺特概形 S 上的相对射影平坦群概形。证明存在 S 上的相对拟射影概形代表函子

$$((\text{局部诺特 } S\text{-概形}))\to((\text{群}))$$
$$T\mapsto\{G\times_S T \text{ 的 } T\text{-群概形自同构}\}$$

ii) 设 $\mathcal{F}$ 为诺特整概形 S 上的凝聚层, 且在 S 的一个非空开集上是局部自由秩 n 的。证明存在有理满态射 $f:T\to S$ 使得 $f^*\mathcal{F}/(f^*\mathcal{F})_{\mathrm{tor}}$ 是 T 上的秩 n 局部自由层, 其中 $(f^*\mathcal{F})_{\mathrm{tor}}$ 是 $f^*\mathcal{F}$ 的 O_T-零因子组成的子层。

2. 皮卡概形, 阿尔巴内塞簇及雅可比簇

2.1. 除子. 设 X 为域 k 上的概形, $D\subset X$ 为闭子概形, 若 D 的定义理想层 $\mathcal{I}_D$ 局部处处由一个非零因子生成 (即为可逆层), 则称 D 为 X 的一个有效除子。更一般地, 设 S 是诺特概形, $\pi:X\to S$ 为有限型平坦态射, 一个闭子概形 $D\subset X$ 称作一个 S-有效除子, 如果 D 在 S 上平坦且 D 的定义理想层 $\mathcal{I}_D$ 是可逆层, 此时我们记 $\mathcal{L}(D)=\mathcal{I}^{-1}$。由引理二.1.vii) 可见一个闭子概形 $D\subset X$ 为 S-有效除子当且仅当 D 的理想层为可逆层且任意点 $s\in S$ 上的纤维 D_s 为 X_s 中的有效除子, 或 D 在 S 上平坦且任意点 $s\in S$ 上的纤维 D_s 为 X_s 中的有效除子。

若 $D\subset X$ 为 S-有效除子, 则包含映射 $\mathcal{I}_D\to O_X$ 等价于一个同态 $i:O_X\to\mathcal{L}(D)$, 或者一个截口 $t=i(1)\in\Gamma(X,\mathcal{L}(D))$。反之, 对 X 上的任一可逆层 $\mathcal{L}$, 给定一个截口 $t\in L:=\Gamma(X,\mathcal{L})$ 等价于给定一个同态 $i_t:\mathcal{L}^{-1}\to O_X$, 若在任一点 $s\in S$ 上的纤维 X_s 上 $t_s\in\Gamma(X_s,\mathcal{L}_s)$ 都没有局部零化子, 则 i_t 定义一个 S-有效除子 $D\subset X$ 满足 $\mathcal{L}(D)\cong\mathcal{L}$。若 $t'\in L$ 也定义一个 S-有效除子 D', 则有 $\mathcal{L}(D)\cong\mathcal{L}(D')$; 而 $D=D'$ 当且仅当 $\mathrm{im}(i_t)=\mathrm{im}(i_{t'})$, 或 $O_Xt=O_Xt'\subset\mathcal{L}$, 换言之 $t'=ut$, 其中 $u\in\Gamma(X,O_X)^*$。记 $|\mathcal{L}|_{X/S}=\{S\text{-有效除子 } D\subset X|\text{存在 } S \text{ 上的可逆层 } \mathcal{F} \text{ 使得 } \mathcal{L}(D)\cong\mathcal{L}\otimes_{O_S}\mathcal{F}\}$, 称为一个线性系。同一个线性系中的除子称作相互线性等价的。

设 π 为忠实平坦相对射影且具有几何整纤维, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层, 则 $\mathcal{E}=\pi_*\mathcal{L}$ 是 S 上的凝聚层。设 $\mathcal{L}$ 满足条件

$(*)$ $\mathcal{E}$ 是局部自由 O_S-模层, 且对任意 $s\in S$ 有 $\mathcal{E}_s\cong\pi_*\mathcal{L}_s$。

(我们知道对 X 上的任意可逆层 $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0(n)$ 对于 $n\gg 0$ 满足 $(*)$, 参看 [H, Theorem Ⅲ.5.2] 及二.3)。设 $f:O_S\to\mathcal{E}$ 为 O_S-单同态使得 $\mathcal{E}/f(O_S)$ 为 O_S-局部自由的, 则 f 诱导 O_X-同态 $O_X\to\mathcal{L}$, 从而诱导 $f_1:\mathcal{L}^{-1}\to O_X$。由平坦性的局部判别准则, f_1 为单同态且 $O_X/\mathrm{im}(f_1)$ 为 O_S-平坦的, 从而定义一个 S-有效除子 $D\subset X$ 使得 $\mathcal{L}(D)\cong\mathcal{L}$。此外, 若 $f':O_S\to\mathcal{E}$ 为 O_S-单同态使得 $\mathcal{E}/f'(O_S)$ 为 O_S-局部自由的, 而 f' 给出 S-有效除子 $D'\subset X$, 则 $D'=D$ 当且仅当 $\mathrm{im}(f)=\mathrm{im}(f')$, 即 f' 与 f 相差一个 O_S 的自同构, 或 $\Gamma(S,O_S^*)$ 的一个元 (注意由半连续性理论 $\pi_*O_X\cong O_S$, 因为 π 具有几何连通约化纤维)。反之, 设 $D\subset X$ 为有效除子使得 $\mathcal{L}(D)\cong\mathcal{L}$, 则 D 给出一个 O_X-同态 $\mathcal{L}^{-1}\to O_X$, 这等价于一个 O_X-同态 $O_X\to\mathcal{L}$, 从而诱导一个 O_S-同态 $f:O_S\to\mathcal{E}$。由平坦性的局部判别准则, f 是单同态且 $\mathcal{E}/f(O_S)$ 为 O_S-局部自由的。注意这样一个 f 等价于 $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)\to S$ 的一个截口, 这样我们就得到

引理 1. 设 S 为诺特概形, $\pi:X\to S$ 为忠实平坦相对射影态射且具有几何整纤维, $\mathcal{L}$ 为 X 上满

足 (*) 的可逆层。则 $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$ 代表函子

$$\begin{aligned}&((\text{局部诺特 } S\text{-概形}))\to((\text{集合}))\\ &\qquad(\phi:T\to S)\mapsto|(\mathrm{id}_X\times_S\phi)^*\mathcal{L}|_{X\times_S T/T}\end{aligned}$$

X 上的一个可逆层 $\mathcal{L}$ 称为 S-局部平凡的，如果存在 S 上的可逆层 $\mathcal{E}$ 使得 $\mathcal{L}\cong\pi^*\mathcal{E}$，注意此时必有 $\mathcal{E}\cong\pi_*\mathcal{L}$，因为 π 具有几何整纤维。因此，两个 S-有效除子 $D,D'\subset X$ 线性等价当且仅当 $\mathcal{L}(D-D')=\mathcal{L}(D)\otimes_{O_X}\mathcal{L}(D')^{-1}$ 是 S-局部平凡的。

引理 2. 设 S 为诺特概形，$\pi:X\to S$ 为忠实平坦相对射影态射且具有几何连通约化纤维，$\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层。则存在 S 的闭子概形 S_0 代表函子

$$\begin{aligned}&((\text{局部诺特概形}))\to((\text{集合}))\\ &\qquad T\mapsto\{\text{态射 } f:T\to S \text{ 使得 } (\mathrm{id}_X\times_S f)^*\mathcal{L} \text{ 为 } T\text{-局部平凡的}\}\end{aligned}$$

证. 设 X_0 为域 K 上的整射影概形，$\mathcal{L}_0$ 为 X_0 上的可逆层，则易见 $\mathcal{L}_0\cong O_{X_0}$ 当且仅当 $\Gamma(X_0,\mathcal{L}_0)$ 和 $\Gamma(X_0,\mathcal{L}_0^{-1})$ 均非零。

不妨设 $S=\mathrm{Spec}R$。令 $\bar{S}_0=\{s\in S|\Gamma(X_s,\mathcal{L}_s)\neq 0,\Gamma(X_s,\mathcal{L}_s^{-1})\neq 0\}$，则由半连续性理论 (参看二.3) $\bar{S}_0$ 为闭集，此外存在有限秩自由 R-模的 R-同态 $\phi:M_1\to M_2$ 使得对任意态射 $f:T=\mathrm{Spec}A\to S$ 有 $\Gamma(X\times_S T,(\mathrm{id}_X\times_S f)^*\mathcal{L})\cong\ker(\phi\otimes_R\mathrm{id}_A:M_1\otimes_R A\to M_2\otimes_R A)$。令 $M=\mathrm{coker}(\phi^\vee:M_2^\vee\to M_1^\vee)$，则有 $\ker(\phi\otimes_R\mathrm{id}_A)\cong Hom_R(M,A)$。特别地，对任意对应于 $\bar{S}_0$ 中点的极大理想 $P\subset R$ 有 $M/PM\cong R/P$，故存在 $\bar{S}_0$ 的开邻域 $U\subset S$ 使得 M 在 U 上局部由一个元生成。注意若 $(\mathrm{id}_X\times_S f)^*\mathcal{L}$ 为 T-局部平凡的，则 f 将 T 的点都映入 $\bar{S}_0$ 中。由此通过局部化不妨设 $M\cong R/I$。

我们来验证 $S_0=V(I)$ 满足引理的要求。令 $J=\{\psi(1)|\psi\in Hom_R(R/I,A)\}$，则 J 为 A 的理想。若 $J\neq A$，取 A 的极大理想 $P\supset J$，则 $Hom_R(R/I,A)\to Hom_R(R/I,A/P)$ 为零同态，故 $(\mathrm{id}_X\times_S f)^*\mathcal{L}$ 在 P 附近不是局部平凡的。注意 $J=A$ 当且仅当 $f^*(I)=0$，且此时有 $Hom_R(R/I,A)\cong A$，这诱导 $(\mathrm{id}_X\times_S f)^*\mathcal{L}\cong O_{X\times_S T}$。证毕。

引理 3. 设 S 为诺特概形，$\pi:X\to S$ 为有限型光滑态射，$D\subset X$ 为 S-平坦闭子概形。若存在稠密开子概形 $U\subset S$ 使得 $D\times_S U\subset X\times_S U$ 为 U-有效除子，则 $D\subset X$ 为 S-有效除子。

证. 情形 1: S 是正则的。为方便起见不妨设 $S=\mathrm{Spec}R$。设 $x\in X$，$s=\pi(x)$ 对应于素理想 $p\subset R$，则 $A=O_{X,x}$ 为正则局部环，因而是 UFD (参看 [M, Theorem 48] 或 [L1, 定理 XV.2.3])。令 $I\subset A$ 为 D 的定义理想层在 x 的茎，a 为 I 中元素的最大公因子，则 $a\notin pA$，因为 $I\not\subset pA$。故存在在 x 的一个开邻域 $U'\subset X$ 使得 (a) 在 U' 上定义一个在 S 上平坦的除子 D_1 且 $J=(I:a)$ 在 U' 上定义一个闭子概形 D_2。由正合列

$$0\to J\to A\xrightarrow{a\cdot}A/I\to A/(a)\to 0 \tag{1}$$

可见 A/J 为 R-平坦的，即 D_2 为 S-平坦的。由所设易见 $D_2\times_S U$ 为 $U'\times_S U$ 的除子，故 D_2 在 U 上的非空纤维的维数等于 π 的相对维数减 1；另一方面，D_2 在 $\pi(x)$ 上的维数小于 π 的相对维数减 1。由于平坦态射的纤维维数等于相对维数，只能有 $D_2=\emptyset$，即 $I=(a)$。故 D 为 X 中的除子。

情形 2: S 是 $\mathbb{Z}$ 上的有限型概形。仍不妨设 $S=\mathrm{Spec}R$。注意 π 将闭点映到闭点，故由上所述只需证明对任意闭点 $s\in S$，纤维 D_s 是 X_s 中的除子。设 K 为 s 点处的剩余类域。我们可取包含 s 的 1 维整子概形 subscheme $V\subset S$ 使得 $V\cap U\neq\emptyset$。令 V' 为 V 的正规化，则 V' 是正则的。由情形 1 可见 $D\times_S V'$ 是 $X\times_S V'$ 中的除子。故存在有限域扩张 $K'\supset K$ 使得 $D_s\otimes_K K'$ 是 $X_s\otimes_K K'$ 中的除子。因此 $D_s\subset X_s$ 的理想层是忠实平坦 O_{X_s}-模，即 D_s 是 X_s 中的除子。

情形 3: 一般情形。不妨设 $S=\mathrm{Spec}R$, $X=\mathrm{Spec}A$, 其中 A 为有限生成的 R-代数。取一个多项式代数 $B=R[x_1,...,x_n]$ 使得存在 R-代数满同态 $B\to A$, 再取有限生成的自由 B-模 M,N 使得存在 B-模正合列

$$M\to N\to B\to A\to 0 \tag{2}$$

我们可取有限生成的 $\mathbb{Z}$-子代数 $R_0\subset R$ 使得 (2) 定义在 R_0 上, 即存在 $B_0=R_0[x_1,...,x_n]$ 上的有限生成的自由模 M_0,N_0 使得存在 B_0-模正合列

$$M_0\to N_0\to B_0\to A_0\to 0 \tag{3}$$

且 (3) $\otimes_{R_0}R$ 给出 (2)。令 $U_0\subset S_0=\mathrm{Spec}R_0$ 为最大开子集使得 $X_0=\mathrm{Spec}A_0$ 在其上 (的限制) 平坦。我们来验证 $S\to S_0$ 经过 U_0。对任一点 $p\in S$, 令 $p_0=p\cap R_0$, $R_{p0}=(R_0)_{p_0}$, 由 (3) 有 $0=Tor_1^R(R_p/pR_p,A)\cong Tor_1^{R_0}(R_p/pR_p,A_0)$, 但 R_p/pR_p 是自由 (R_{p0}/p_0R_{p0})-模, 故 $Tor_1^{R_0}(R_{p0}/p_0R_{p0},A_0)=0$, 因此 $(A_0)_{p_0}$ 在 R_0 上平坦, 即 $p_0\in U_0$ (参看 [23, Theorem 49] 或 [14, 命题 XIII.5.1])。通过进一步收缩 S 不妨设 $U_0=S_0$。为简单起见不妨设 S_0 是连通的。用和上面同样的方法, 我们可取有限生成的 R_0-子代数 $R_1\subset R$ 使得 $A_1=A_0\otimes_{R_0}R_1$ 在 R_1 上光滑, 即 $\Omega^1_{A_1/R_1}$ 为局部自由秩 $d=\dim(A_0)-\dim(R_0)$ (注意 $\Omega^1_{A/R}\cong\Omega^1_{A_1/R_1}\otimes_{R_1}R$)。设 $I\subset A$ 为 D 的定义理想, 再用上面的方法 (必要时再收缩 S) 可得有限生成的 R_1-子代数 $R_2\subset R$ 及理想 $I_2\subset A_2=A_1\otimes_{R_1}R_2$ 使得 A_2/I_2 为 R_2-平坦且 $I=I_2\otimes_{R_2}R\subset A$。对任意 $a\in R$ 使得 $\mathrm{Spec}R_a\subset U$, I_a 在 A 上平坦, 我们可进一步假设 $a\in R_2$ 且 $(I_2)_a$ 在 A_2 上平坦, 即 $\mathrm{Spec}(A_2/I_2)_a\subset\mathrm{Spec}(A_2)_a$ 是 $\mathrm{Spec}(R_2)_a$ 上的除子。注意 $S_2=\mathrm{Spec}R_2$ 的每个一般点都在 $S\to S_2$ 的象中, 故所有 $\mathrm{Spec}(R_2)_a$ 给出一个稠密开子概形 $U_2\subset S_2$, 在其上 $\mathrm{Spec}(A_2/I_2)\subset\mathrm{Spec}A_2$ 为除子。由于 R_2 是有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数, 由情形 2 可见 $\mathrm{Spec}(A_2/I_2)\subset\mathrm{Spec}A_2$ 是 S_2-除子, 从而 $D\subset X$ 是 S-除子。证毕。

设 S 为诺特概形, $\pi:X\to S$ 为忠实平坦相对射影态射。对任一希尔伯特多项式 χ, 令 $\mathrm{Div}(X/S)$ 为所有 S-有效除子 $D\subset X$ 的集合, $\mathrm{Div}^\chi(X/S)=\{D\in\mathrm{Div}(X/S)|D\to S$ 的纤维具有希尔伯特多项式 $\chi\}$。仿照定理 1.2.iv) 的证法, 易见存在 $\mathcal{H}ilb_{X/S}$ 的开子概形 $\mathcal{D}iv_{X/S}$ 代表如下函子

$$\begin{aligned}&((\text{局部诺特 } S\text{-概形}))\to((\text{集合}))\\ &\qquad T\mapsto\mathrm{Div}(X\times_S T/T)\end{aligned}$$

此外对任意希尔伯特多项式 χ 记 $\mathcal{D}iv^\chi_{X/S}=\mathcal{H}ilb^\chi_{X/S}\cap\mathcal{D}iv_{X/S}$, 它代表 $T\mapsto\mathrm{Div}^\chi(X\times_S T/T)$。由引理 3 我们有

推论 1. 设 S 为诺特概形, $\pi:X\to S$ 为光滑相对射影满态射, χ 为希尔伯特多象式。则 $\mathcal{D}iv^\chi_{X/S}$ 是在 S 上相对射影的。

2.2. 皮卡概形 (Picard Scheme). 对任意概形 X, 所有 X 上的可逆层的同构类 (等价于直线从的同构类) 以 $\otimes_{O_X}$ 为乘法组成一个群, 称为 X 的皮卡群, 记为 $\mathrm{Pic}(X)$。若 X 是整的, 则 $\mathrm{Pic}(X)$ 同构于 X 的 (卡迪耶) 除子类群。设 $\pi:X\to S$ 为态射, 则 $\mathcal{E}\mapsto\pi^*\mathcal{E}$ 给出 S 的皮卡群 $\mathrm{Pic}(S)$ 到 X 的皮卡群 $\mathrm{Pic}(X)$ 的同态, 我们称 $\mathrm{Pic}(X/S)=\mathrm{Pic}(X)/\pi^*\mathrm{Pic}(S)$ 为 π 的*相对皮卡群* (当 π 为忠实平坦相对射影且具有几何连通约化纤维时, 对任意 $\mathcal{E}\in\mathrm{Pic}(S)$ 有 $\pi_*\pi^*\mathcal{E}\cong\mathcal{E}$, 故 $\pi^*:\mathrm{Pic}(S)\to\mathrm{Pic}(X)$ 有截口, 从而可将 $\mathrm{Pic}(S)$ 看作 $\mathrm{Pic}(X)$ 的子群)。如果给定 π 的一个截口 $\zeta:S\to X$, 则对 X 上的任一可逆层 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0=\mathcal{L}\otimes_{O_X}(\zeta\circ\pi)^*\mathcal{L}$ 满足 $\zeta^*\mathcal{L}_0\cong O_S$, 且对 S 上的任意可逆层 $\mathcal{E}$ 有 $(\mathcal{L}\otimes_{O_X}\pi^*\mathcal{E})_0\cong\mathcal{L}_0$, 这样我们可以用 $\mathcal{L}_0$ 作为 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 中的元的代表, 从而将 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 看作 $\mathrm{Pic}(X)$ 的子群 (注意此时 $\pi^*:\mathrm{Pic}(S)\to\mathrm{Pic}(X)$ 是单射, 实际上 $\mathrm{Pic}(X)$ 是 $\pi^*\mathrm{Pic}(S)$ 与 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 的直积), 在以下遇到这种情形时都照此理解。

设 S 为诺特概形, $\pi:X\to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 则对于任一希尔伯特多项式 χ 我们可以定义 $\mathrm{Pic}^\chi(X/S)$, 即 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 中 (纤维) 具有希尔伯特多项式 χ 的可逆层类组成的子集。

为方便起见我们用下面的术语: 设 $\pi: X \to S$ 为忠实平坦相对射影且具有几何整纤维, 一个 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 称为**好的**, 如果对任意 $s \in S$ 及任意 $i > 0$, $H^i(X_s, \mathcal{L}_s) = 0$。此时由半连续性理论可知 $\mathcal{E} = \pi_* \mathcal{L}$ 是局部自由的且生成 $\mathcal{L}$, 而且对任意 $s \in S$ 有 $\mathcal{E}_s \cong \Gamma(X_s, \mathcal{L}_s)$。对 X 上的任意可逆层 $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_0(n)$ 当 $n \gg 0$ 时是好的。对任一希尔伯特多项式 χ, 记 $\mathrm{Div}^{\chi,n}(X/S) = \{D \in \mathrm{Div}^{\chi}(X/S) | \mathcal{L}(D)(n)$ 是好的$\}$。记 $\mathrm{Pic}^{\chi,n}(X) = \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^{\chi}(X) | \mathcal{L}(n)$ 是好的$\}$, 且记 $\mathrm{Pic}^{\chi,n}(X/S)$ 为 $\mathrm{Pic}^{\chi,n}(X)$ 在 $\mathrm{Pic}^{\chi}(X/S)$ 中的象。存在典范映射 $\mathrm{Div}^{\chi,n}(X/S) \to \mathrm{Pic}^{\chi,n}(X/S)$ 将一个除子 D 映到 $\mathcal{L}(D)$ 的等价类, 由引理 1 这是满射。由半连续性理论, 存在开子概形 $\mathcal{D}iv^{\chi,n}_{X/S} \subset \mathcal{D}iv^{\chi}_{X/S}$ 代表如下函子

$$\begin{aligned}&((\text{局部诺特 } S\text{-概形})) \to ((\text{集合}))\\ &\qquad T \mapsto \mathrm{Div}^{\chi,n}(X \times_S T/T)\end{aligned}$$

定理 1. 设 $\pi: X \to S$ 为平坦相对射影态射, 具有几何整纤维, 且有一个截口 $\zeta: S \to X$, 则存在 S-局部拟射影群概形 $\mathcal{P}ic(X/S)$ (称为 X 在 S 上的皮卡概形) 代表函子

$$\begin{aligned}&\mathfrak{Pic}: ((\text{局部诺特 } S\text{-概形})) \to ((\text{集合}))\\ &\qquad T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T/T)\end{aligned}$$

($X \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 上的泛可逆层称为 $X \to S$ 的庞加莱层, 记为 $\mathcal{P}_{X/S}$。) 此外, 若 π 是光滑的, 则 $\mathcal{P}ic(X/S) \to S$ 为局部射影的 (即 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的任意点有开邻域, 其闭包为在 S 上相对射影的)。

证. 为简单起见不妨设 S 是连通的。

设 χ_0 为一希尔伯特多项式, 记 $\chi_n(x) = \chi_0(n + x)$。令 $Y_1 = \mathcal{D}iv^{\chi_n,n}_{X/S}$。由引理 2, 存在闭子概形 $Y_2 \subset Y_1 \times_S Y_1$ 代表如下函子:

$$\begin{aligned}&((\text{局部诺特 } S\text{-概形})) \to ((\text{集合}))\\ &\qquad (\phi: T \to S) \mapsto \{\text{除子对 } D_1, D_2 \in \mathrm{Div}^{\chi_n,n}(X \times_S T/T) \text{ 使得}\\ &\qquad\qquad \mathcal{L}(D_1 - D_2) \text{ 在 } T \text{ 上局部平凡}\}\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{L}(D_1 - D_2)$ 在 T 上局部平凡当且仅当 $D_2 \in |\mathcal{L}(D_1)|_{X \times_S T/T}$, 由引理 1 可见 $\mathrm{pr}_1: Y_2 \to Y_1$ 为射影空间从。由抽象废话可见 Y_2 给出 Y_1 在 S 上的一个等价关系。故由引理五.1, pr_1 和 $\mathrm{pr}_2: Y_2 \to Y_1$ 具有等化子 $p: Y_1 \to Y = Y_1/\sim_{Y_2}$, 其中 p 是忠实平坦相对射影的, Y 为在 S 上相对拟射影的, 且 $Y_2 = Y_1 \times_Y Y_1$。我们来证明 Y 代表如下函子:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{Pic}^{\chi_0,n}_{X/S}: ((\text{局部诺特 } S\text{-概形})) \to ((\text{集合}))\\ &\qquad T \mapsto \mathrm{Pic}^{\chi_0,n}(X \times_S T/T)\end{aligned}$$

令 $Y_3 = Y_2 \times_{Y_1} Y_2 \cong Y_1 \times_Y Y_1 \times_Y Y_1$ (每个 Y_2 的拷贝通过 pr_2 看作 Y_1-概形)。设 $D_1 \subset X \times_S Y_1$ 为泛除子, $\zeta_1 = \zeta \times_S \mathrm{id}_{Y_1}: Y_1 \to X \times_S Y_1$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(D_1) \otimes_{O_{Y_1}} (\zeta_1 \circ \mathrm{pr}_2)^* \mathcal{L}(D_1)^{-1}$。则 $\zeta_1^* \mathcal{L}_1 \cong O_{Y_1}$ (即 $\mathcal{L}_1 \in \mathrm{Pic}^{\chi_n,n}(X \times_S Y_1/Y_1)$) 且 $\mathrm{pr}_{12}^* \mathcal{L}_1 \cong \mathrm{pr}_{13}^* \mathcal{L}_1$。令 $\mathcal{L}_2 = \mathrm{pr}_{12}^* \mathcal{L}_1$。令 $\mathcal{E}_1 = \mathrm{pr}_{2*} \mathcal{L}_1$, $\mathcal{E}_2 = \mathrm{pr}_{2*} \mathcal{L}_2$。则 ζ 诱导典范态射 $\eta_1: \mathcal{E}_1 \to \zeta_1^* \mathcal{L}_1 \cong O_{Y_1}$, 类似地有典范态射 $\eta_2: \mathcal{E}_2 \to O_{Y_2}$。由引理 2 有 $Y_2 \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}_1^\vee)$, 故 η_1 给出射影空间从 $Y_2 \to Y_1$ 中的一个典范超平面从 $H_2 \subset Y_2$。类似地, η_2 给出射影空间从 $Y_3 \to Y_2$ 中的一个典范超平面从 $H_3 \subset Y_3$。注意 η_1 通过 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2: Y_2 \to Y_1$ 的拉回都等于 $\eta_2: \mathcal{E}_2 \to O_{Y_2}$, 我们有 $H_3 = \mathrm{pr}_{12}^{-1}(H_2) = \mathrm{pr}_{13}^{-1}(H_2) \subset Y_3$。显然 pr_{12} 和 pr_{13} 分别诱导射影空间从 $q_1: H_3 \to H_2$ 和 $q_2: H_3 \to H_2$, 而 $H_3 \subset H_2 \times_{Y_1} H_2$。易见 H_3 给出 H_2 上的一个等价关系 (由 Y_3 在 Y_2 上给出的等价关系诱导), 故由 [18, Proposition 1.2] 可见 q_1 和 q_2 有在 Y_1 上的几何等化子 $H_2 \to H_1 = H_2/\sim_{H_3}$ (可以这样理解 H_1: 将 $H_2 \times_{Y_1} H_2$ 看作 H_2 上的射影空间从, 则 H_3 可以看作一个子从, 由定理 2.2.ii) 可知这诱导一个 Y_1-态射 $H_2 \to \mathcal{H}ilb_{H_2/Y_1}$, 它的象就是 H_1), 且有诱导态射 $H_2 \to H_1 \times_{Y_1} Y_2$。由

$$H_2 \times_{H_1} H_2 = H_3 = H_2 \times_{Y_1} Y_2 \cong H_2 \times_{H_1} (H_1 \times_{Y_1} Y_2) \tag{4}$$

有 $H_2 \cong H_1 \times_{Y_1} Y_2$, 故 $H_1 \to Y_1$ 是闭嵌入, 因为它通过忠实平坦态射 pr_2 的拉回是闭嵌入 $H_2 \to Y_2$。由于 $Y_1 \to Y$ 是忠实平坦的, 可见 $H_1 \subset Y_1$ 是 Y-有效除子, 而 $\mathcal{L}(H_1)$ 给出 $p: Y_1 \to Y$ 一个射影空间丛结构。

对任意开子概形 $U \subset Y$ 及 p 的任意局部截口 $\mu: U \to Y_1$, 令 $\mathcal{L}_\mu = (\mathrm{id}_X \times_S \mu)^* \mathcal{L}_1$, 将 $(\mathrm{id}_X \times_S \mu \times_Y \mathrm{id}_{Y_1})^*$ 作用于 $\mathrm{pr}_{12}^* \mathcal{L}_1 \cong \mathrm{pr}_{13}^* \mathcal{L}_1$ 两边, 得到

$$(\mathrm{id}_X \times_S p|_U)^* \mathcal{L}_\mu \cong \mathcal{L}_1|_{X \times_S p^{-1}(U)} \tag{5}$$

故 $\mathcal{L}_\mu$ 在同构之下与 μ 的选取无关。此外, 由于 $\mathcal{E}nd_{O_{X \times_S U}}(\mathcal{L}_\mu) \cong O_{X \times_S U}$ 及 $\mathrm{pr}_{2*} O_{X \times_S U} \cong O_U$ (因 π 具有几何整纤维), 对任意另一截口 $\mu': U \to Y_1$ 存在唯一同构 $\mathcal{L}_\mu \cong \mathcal{L}_{\mu'}$, 其通过 $\zeta \times_S \mathrm{id}_U$ 的拉回为 O_U 的单位自同构。故所有 $\mathcal{L}_\mu$ 粘起来给出 Y 上的一个可逆层 $\mathcal{L}$, 满足 $(\mathrm{id}_X \times_S p)^* \mathcal{L} \cong \mathcal{L}_1$。

我们来验证 $(Y, \mathcal{L}(-n))$ 代表 $\mathfrak{Pic}^{\chi_0, n}_{X/S}$。对任意 S-概形 T 及任意 $\mathcal{L}' \in \mathrm{Pic}^{\chi_0, n}(X \times_S T/T)$, $\mathcal{E}' = \mathrm{pr}_{2*} \mathcal{L}'(n)$ 是局部自由的。在任意开子概形 $U \subset T$ 上, $\mathcal{E}'$ 的任意局部截口 $\mu': \mathcal{E}'^\vee|_U \twoheadrightarrow O_U$ 给出一个 U-有效除子 $D \subset X \times_S U$ 使得 $\mathcal{L}(D)(-n) \cong \mathcal{L}'_U := \mathcal{L}'|_{X \times_S U}$。由于 $\chi_{\mathcal{L}(D)} = \chi_n$, 这诱导 S-态射 $\phi: U \to Y_1$ 使得 $(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^{-1} D_1 = D$。故由 $\mathcal{L}$ 的定义有 $(\mathrm{id}_X \times_S \psi)^* \mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L}'_U(n)$, 其中 $\psi = p \circ \phi$。若有另一 S-态射 $\psi': U \to Y$ 使得 $(\mathrm{id}_X \times_S \psi')^* \mathcal{L} \cong \mathcal{L}'_U(n)$, 取 p 的局部截口 μ (为简单起见可取 U 充分小, 使得 μ 定义在 $\psi'(U)$ 上), 可得一除子 $D' \subset X \times_S U$ 使得 $\mathcal{L}(D') \cong \mathcal{L}'_U$, 这给出一个态射 $\lambda: U \to Y_2$ 使得 $\mathrm{pr}_1 \circ \lambda = \phi$, $\mathrm{pr}_2 \circ \lambda = \mu \circ \psi'$, 故

$$\psi' = p \circ \mu \circ \psi' = p \circ \mathrm{pr}_2 \circ \lambda = p \circ \mathrm{pr}_1 \circ \lambda = p \circ \phi = \psi \tag{6}$$

这说明 Y 代表 $\mathfrak{Pic}^{\chi_0, n}_{X/S}$, 故我们记 $Y = \mathcal{P}ic^{\chi_0, n}(X/S)$。

若 $m > n$, 包含态射 $\mathrm{Pic}^{\chi_0, n}(X \times_S T/T) \hookrightarrow \mathrm{Pic}^{\chi_0, m}(X \times_S T/T)$ (对所有 T) 诱导典范态射 $\mathcal{P}ic^{\chi_0, n}(X/S) \to \mathcal{P}ic^{\chi_0, m}(X/S)$, 由半连续性理论这是开嵌入。故所有 $\mathcal{P}ic^{\chi_0, n}(X/S)$ (对所有 n) 粘起来给出 S 上的一个局部拟射影概形 $\mathcal{P}ic^{\chi_0}(X/S)$, 代表如下函子:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Pic}^{\chi_0}_{X/S}: ((\text{局部诺特 } S\text{-概形})) &\to ((\text{集合})) \\ T &\mapsto \mathrm{Pic}^{\chi_0}(X \times_S T/T) \end{aligned}$$

令 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 为所有 $\mathcal{P}ic^{\chi_0}(X/S)$ (对所有 χ_0) 的不相交并, 则 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 为 S 上的局部拟射影概形, 且代表 $\mathfrak{Pic}_{X/S}$。此外, 由抽象废话不难看出 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 是群概形: 令 $\mathcal{L}$ 为 $X \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 上的泛可逆层, 则 $W = X \times_S \mathcal{P}ic(X/S) \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 上的可逆层 $\mathrm{pr}_{12}^* \mathcal{L} \otimes_{O_W} \mathrm{pr}_{13}^* \mathcal{L}$ 给出典范 (乘法) 态射 $m: \mathcal{P}ic(X/S) \times_S \mathcal{P}ic(X/S) \to \mathcal{P}ic(X/S)$, O_X 给出单位截口 $o: S \to \mathcal{P}ic(X/S)$, $X \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 上的可逆层 $\mathcal{L}^{-1}$ 给出逆 $\iota: \mathcal{P}ic(X/S) \to \mathcal{P}ic(X/S)$, 这些合起来就给出 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的群概形结构。

在 π 光滑的情形, 对任意希尔伯特多项式 χ_0 及任意 n, 令 D 为 $X \times_S \mathcal{D}iv^{\chi_n}(X/S)$ 上的泛除子, 取 $m > n$ 使得 $\mathcal{L}(D)(m-n)$ 是好的。这样就存在诱导态射 $\mathcal{D}iv^{\chi_n}(X/S) \to \mathcal{P}ic^{\chi_0, m}(X/S)$, 其象 $Z \supset \mathcal{P}ic^{\chi_0, n}(X/S)$。由推论 1, Z 是在 S 上紧的, 故 $\mathcal{P}ic^{\chi_0, n}(X/S)$ 在 $\mathcal{P}ic^{\chi_0, m}(X/S)$ 中的闭包是在 S 上紧的。因而 $\mathcal{P}ic^{\chi_0, n}(X/S)$ 在 $\mathcal{P}ic^{\chi_0, m}(X/S)$ $(m \gg n)$ 中的闭包与 m 的选取无关, 即它是 $\mathcal{P}ic^{\chi_0}(X/S)$ 的有限多个不可约分支的并。这说明 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 是在 S 上局部射影的。证毕。

注 1. 在 π 光滑的情形, 我们仅证明了 $\mathcal{P}ic(X/S) \to S$ 在弱意义下的局部射影性, 即 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的每个不可约分支是在 S 上紧的。事实上 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的每个连通分支是在 S 上紧的, 但要证明这一点需要更多的准备。我们这里仅对 $S = \mathrm{Spec} k$ (k 为域) 的情形予以说明。

先设 k 是代数闭的。令 $V_0 = \mathcal{P}ic^0(X/k) \subset \mathcal{P}ic(X/k)$ 为包含 $0 \in \mathcal{P}ic(X/k)$ (0 是对应于 O_X 的点) 的不可约分支, $V_1 \subset \mathcal{P}ic(X/k)$ 为另一不可约分支, 均带有约化诱导概形结构。则由于 $m(V_0 \times_k V_1$ 是整的且包含 V_1, 它必等于 V_1, 特别地由此可见 V_0 是 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 的子群簇。注意对任意闭点 $v_0 \in \mathcal{P}ic(X/k)$, $v \mapsto v + v_0$ 是 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 的自同构, 由此易见 $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, 因否则 V_0 的所有点都属于两个不同的分支, 与 V_0 是不可约分支的假设矛盾。故 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 的包含 0 的连通

分支 V 是不可约的,且有诱导的群概形结构,而任一其它连通分支都等于某个 $v+V$ (v 为闭点),从而作为概形同构于 V。$\mathcal{P}ic(X/k)/V$ 具有离散的群概形结构,它是有限生成的阿贝尔群 (参看 [LN]),其自由部份称为 X 的 Néron-Severi 群,记为 $\mathrm{NS}(X)$。

对一般的域 k, 由此可见 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 的连通分支都是不可约的且具有相同的维数,其中包含 0 的连通分支有诱导的群概形结构。

注 2. 在定理 1 的证明中,即使没有给定截口 ζ, 我们仍能构造 $\mathcal{P}ic(X/S)$ (只是不能构造泛可逆层),且有自然变换 $\theta: \mathfrak{Pic}_{X/S} \to \mathcal{P}ic(X/S)$ (当 π 有截口时这是自然等价)。注意对任意态射 $T \to S$ 有 $\mathcal{P}ic(X\times_S T/T) \cong \mathcal{P}ic(X/S)\times_S T$, 而 $\mathrm{pr}_2 : X\times_S X \to X$ 有截口 Δ, 可见对任意 S-概形 T, $\theta(T): \mathrm{Pic}(X\times_S T/T) \to \mathrm{Mor}_S(T, \mathcal{P}ic(X/S))$ 是单射,且当 $\mathrm{pr}_2 : X\times_S T \to T$ 有截口时是一一对应。因此即使不假定 π 有截口, $\mathcal{P}ic(X/S)$ 仍是 $\mathfrak{Pic}_{X/S}$ 的粗糙参量概形。

对 $S = \mathrm{Spec}\mathbb{C}$ 的情形,我们来给出建立 $\mathcal{P}ic(X/S)$ (即 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 的几何结构) 的解析方法。设 X 为 $\mathbb{C}$ 上的射影代数簇,记 X_{an} 为 X 的解析结构,即带有通常的拓扑,而 $O_{X_{\mathrm{an}}}$ 为 X_{an} 上的解析函数层。

我们先来说明 $H^1(O_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X/\mathbb{C})$。令 $\mathcal{K}$ 为 X 上的有理函数层,即对任意非空开集 $U \subset X$ 有 $\mathcal{K}(U) = K(X)$。令 $\mathcal{C} = \mathcal{K}^*/O_X^*$, 称为 Cousin data 层。对任意非空开集 $U \subset X$, 一个截口 $c \in \mathcal{C}(U)$ 相当于对 U 的一个开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$ 给出一组截口 $f_i \in \mathcal{K}(U_i)^*$, 使得在每个交 $U_i \cap U_j$ 上, $f_i/f_j \in O_X^*(U_i\cap U_j)$, 这正是 U 中的一个卡迪耶除子。而 $\mathcal{K}(U)^*$ 的截口在 $\mathcal{C}(U)$ 中的象对应于主除子。由正合列 $0 \to O_X^* \to \mathcal{K}^* \to \mathcal{C} \to 0$ 得长正合列

$$0 \to H^0(O_X^*) \to H^0(\mathcal{K}^*) \to H^0(\mathcal{C}) \to H^1(O_X^*) \to H^1(\mathcal{K}^*) \tag{7}$$

其中 $H^1(\mathcal{K}^*) = 0$, 因为 $\mathcal{K}^*$ 是 flasque (参看 [5, Proposition Ⅲ.2.5])。由上所述 $H^0(\mathcal{C})$ 为 X 的卡迪耶除子群,而 $H^0(\mathcal{K}^*)$ 在 $H^0(\mathcal{C})$ 中的象为主除子全体,故 $H^1(O_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X/\mathbb{C})$。

令 $\mathcal{Z}$ 为 X_{an} 上的预层 $U \mapsto 2\pi i\mathbb{Z}$ (对任意非空开子集 $U \subset X$) 的伴随层,则有正合列

$$0 \to \mathcal{Z} \to O_{X_{\mathrm{an}}} \xrightarrow{\exp} O_{X_{\mathrm{an}}}^* \to 0 \tag{8}$$

由 (8) 得到长正合列,其中 $H^0(\mathcal{Z}) \cong 2\pi i\mathbb{Z}$, $H^0(O_{X_{\mathrm{an}}}) \cong \mathbb{C}$, $H^0(O_{X_{\mathrm{an}}}^*) \cong \mathbb{C}^*$, 而 $0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \to 0$ 是正合的,故有正合列

$$0 \to H^1(\mathcal{Z}) \to H^1(O_{X_{\mathrm{an}}}) \to H^1(O_{X_{\mathrm{an}}}^*) \to H^2(\mathcal{Z}) \tag{9}$$

其中 $H^1(\mathcal{Z}) \cong H^1_{\mathrm{sing}}(X_{\mathrm{an}})$ 和 $H^2(\mathcal{Z}) \cong H^2_{\mathrm{sing}}(X_{\mathrm{an}})$ 是有限生成的阿贝尔群, $H^1(O_{X_{\mathrm{an}}}) \cong \mathbb{C}^g$ (g 为整数),而由上所述 (及 GAGA 定理) $H^1(O_{X_{\mathrm{an}}}^*) \cong \mathrm{Pic}(X/\mathbb{C})$。由此可见 $\mathrm{Pic}^0(X/\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$, 其中 $\Lambda = H^1(\mathcal{Z})$, 而 $\mathrm{Pic}(X/\mathbb{C})/\mathrm{Pic}^0(X/\mathbb{C})$ 同构于 $H^2_{\mathrm{sing}}(X_{\mathrm{an}})$ 的一个子群 (其自由部份即 $\mathrm{NS}(X)$)。若 X 是光滑的,则 $\mathrm{Pic}^0(X/\mathbb{C})$ 是紧致的,即为阿贝尔簇,此时 $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ 为格,而解析映射 $\mathbb{C}^g \to \mathrm{Pic}^0(X/\mathbb{C})$ 由 Θ-函数给出 (见 I.1 节)。

例 1. 在类域论中我们看到下面的对应:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Q} & \text{虚二次域 } K \supset \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}_{ab} & K_{ab} \\ \text{指数函数} & \text{椭圆函数} \\ \mathbb{G}_{m/\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} & \text{椭圆曲线 } E \cong \mathbb{C}/\Lambda \end{array} \tag{10}$$

这并不仅仅是类比, 因为对 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲线 E, 由上所述可见 $\Lambda = H^1(\mathcal{Z})$ 为 $H^1(O_{E_{\mathrm{an}}}) \cong \mathbb{C}$ 中的格, 投射 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda \cong \mathrm{Pic}^0(E/\mathbb{C}) \cong E$ 由指数映射诱导, 而它是由椭圆函数给出的。

2.3. 阿尔巴内塞簇与曲线的雅可比簇. 对于一个代数闭域 k 上的代数簇 X, $\mathrm{Pic}(X/k)$ 可以看作 X 中余维数为 1 的 cycle 类群, 在 X 为曲线的情形, 它也是 0 维 cycle 类群。对任意非负整数 $n < \dim(X)$, 我们可以定义 X 的 n 维 cycle 类群: 令 G 为由所有 n 维子簇生成的自由群, 其元素称为 n 维 cycle, 而任一 $n+1$ 维子簇 $V \subset X$ 的任意有理函数 $f \in K(V)^*$ 给出 G 的一个 cycle, 称为一个主 cycle, 所有主 cycle 生成一个子群 $H \subset G$, 定义 n 维 cycle 类群为 G/H。我们知道 $\mathrm{Pic}(X/k)$ 具有典范的几何结构, 自然会问其它 cycle 类群是否也有典范的几何结构呢? 遗憾的是对一般的 X, 除 0 维 cycle 类群外答案都是否定的, 而对 $n=0$ 也只有下面的较弱结果。

设 X 为域 K 上的代数簇 (不必是拟射影的), 若存在 K 上的阿贝尔簇 A 及有理映射 $\mu_X : X \dashrightarrow A$, 具有如下泛性: 对任意阿贝尔簇 A' 及任意有理映射 $\mu' : X \dashrightarrow A'$, 存在唯一态射 $\phi : A \to A'$ 使得 $\mu' = \phi \circ \mu_X$, 则称 A (或 (A, μ_X)) 为 X 的**阿尔巴内塞簇** (*Albanese*) , 记为 $Alb(X)$。

我们先来考虑 $\dim(X) = 1$ 的情形。设 C 为代数闭域 k 上的非奇异代数曲线, 则由黎曼-罗赫定理, 对任意可逆层 $\mathcal{L}$ 有 $h^0(\mathcal{L}) - h^1(\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}) - g + 1$, 特别地若 $\deg(\mathcal{L}) = 0$ 则 $\chi_{\mathcal{L}} = \chi_{O_C}$, 故 $\deg : \mathcal{P}ic(C/k) \to \mathbb{Z}$ 的核是射影的, 从而 $NS(C) \cong \mathbb{Z}$。令 $\mathcal{D}iv^d(C/k) \subset \mathcal{D}iv(C/k)$ 代表次数为 d 的有效除子而 $\mathcal{P}ic(C/k)^d \subset \mathcal{P}ic(C/k)$ 代表次数为 d 的可逆层, 则 $\mathcal{P}ic(C/k) = \coprod\limits_d \mathcal{P}ic(C/k)^d$ 而 $\mathcal{D}iv(C/k) = \coprod\limits_{d \geq 0} \mathcal{D}iv^d(C/k)$。

令 D_d 为 $\mathcal{D}iv^d(C/k)$ 上的泛除子。若 $d = \deg(\mathcal{L}) \gg 0$, 则 C 中存在次数为 d 的除子 $D = P_1 + ... + P_d$ 使得 $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L}$, 其中 $P_1, ..., P_d \in C$ 为互不相同的点, 故存在开子概形 $U \subset D_d$ 使得 $U \to \mathcal{D}iv^d(C/k) = Y$ 为 étale 复盖。由引理 1.2 可取 étale 复盖 $V \to Y$ 使得 $U \times_Y V$ 为 d 个 V 的拷贝的不相交并, 这样闭嵌入 $U \times_Y V \subset C \times_k V$ 给出 $\mathrm{pr}_2 : C \times_k V \to V$ 的 d 个截口 $V \to C \times_k V$, 从而给出 d 个态射 $f_i : V \to C$ $(1 \leq i \leq d)$。令 C^d 为 C 的 d 个拷贝的积, $\Delta_i : C^d \to C \times_k C^d$ 为 $\Delta_i(P_1, ..., P_d) = (P_i, P_1, ..., P_d)$, 则 $D' = \Delta_1(C^d) + ... + \Delta_d(C^d)$ 为 $C \times_k C^d$ 上的 d 次 C^d-有效除子, 且 $U \times_Y V = (\mathrm{id}_C \times_k f_1 \times_k \cdots \times_k f_d)^{-1}(D')$。由此可见 $V \to Y$ 经过 C^d, 故 Y 为整的且 $C^d \to Y$ 为满的, 从而 $\mathcal{P}ic(C/k)^d$ 也是整的, 故 $\mathcal{P}ic(C/k)^d \cong \mathcal{P}ic^0(C/k)$。令 $C^{(d)} = C^d/\mathfrak{S}_d$, 其中 $\mathfrak{S}_d$ 的作用是置换 C^d 的因子, 则 $\mathfrak{S}_d$ 的作用不改变除子 D', 故有诱导态射 $q : C^{(d)} \to Y$, 且易见 q 在一个非空开集上是一对一的, 从而是双有理的。由此可见 $\dim(Y) = d$。另一方面, 由黎曼-罗赫定理有 $h^0(D_d) = d - g + 1$, 由引理 6.1 $Y \to \mathcal{P}ic(C/k)^d$ 为 $\mathbb{P}^{g-d}$-丛, 故 $\dim(\mathcal{P}ic^0(C/k)) = d - (d-g) = g$。此外, 我们有双有理满态射 $C^g/\mathfrak{S}_g \to \mathcal{D}iv^g(C/k) \to \mathcal{P}ic^0(C/k)$。由此可见对足够一般的 g 次可逆层 $\mathcal{L}$ 只存在一个有效除子 D 使得 $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L}$, 从而由黎曼-罗赫定理 $h^1(\mathcal{L}) = 0$。

记 $\nu : C^g/\mathfrak{S}_g \to \mathcal{D}iv^g(C/k)$ 为投射。取定一点 $P \in C$, 令 $\eta : \mathcal{D}iv^g(C/k) \to \mathcal{P}ic^0(C/k)$ 为态射 $\eta(P_1 + ... + P_g) = \mathcal{L}(P_1 + ... + P_g - gP)$。若 $g > 0$, 对任意闭点 $P_2, ..., P_g$, 令 $\zeta_{P_2,...,P_g} : C \to C^g/\mathfrak{S}_g$ 为将 $P_1 \in C$ 映到 $(P_1, P_2, ..., P_g)$ 的等价类的态射。我们来证明 $\mu = \eta \circ \nu \circ \zeta_{P,...,P}$ 为闭嵌入。对任意闭点 $P_1 \in C$, 由上所述不难证明可取互不相同的闭点 $P_2, ..., P_g \neq P_1$, 使得 $\eta \circ \nu$ 在 $\eta(P_1 + ... + P_g)$ 的一个开邻域上是同构。而 $\zeta_{P_2,...,P_g}$ 在 P_1 附近为闭嵌入。令 τ 为 $\eta(P + P_2 + ... + P_g)$ 给出的 $\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 的平移, 则有 $\tau \circ \mu = \eta \circ \nu \circ \zeta_{P_2,...,P_g}$, 由此可见 μ 在 P_1 附近为闭嵌入。这样我们可以将 $\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 看作"由 C 生成的阿贝尔簇"。

我们来证明对于上述 μ 及 $A = \mathcal{P}ic^0(C/k)$ 有 $Alb(C) \cong (A, \mu)$。设 A' 阿贝尔簇而 $\mu' : C \dashrightarrow A'$ 为有理映射, 令 $\psi : C^d \to A'$ 为 $\psi(P_1, ..., P_g) = \mu'(P_1) + ... + \mu'(P_g)$, 则因 A' 是交换代数群, ψ 诱导 $C^d/\mathfrak{S}_g \to A'$, 但 $C^d/\mathfrak{S}_g$ 与 A 双有理等价, 而由阿贝尔簇的极小性 (即从光滑代数簇到阿贝尔簇的任何有理映射都是态射), 从 A 到 A' 的任意有理映射为态射, 故存在态射 $\phi : A \to A'$ 使得 $\mu' = \phi \circ \mu$; ϕ 的唯一性是显然的, 因为 A 由 C 生成。

特别地, 若 $g = 1$, 则 μ 为同构。

若 $g = 0$, 即 $C \cong \mathbb{P}^1_k$, 则也可以证明 $Alb(C) \cong \mathrm{Spec}k$: 任取椭圆曲线 (亏格为 1 的光滑曲线) C' 及满态射 $C' \to C$。设 A' 为阿贝尔簇而 $\mu' : C \dashrightarrow A'$ 为有理映射, 则由阿贝尔簇的极小性 μ'

为态射。若 μ' 是非平凡的, 则诱导的态射 $C' \to A'$ 是阿贝尔簇的同态, 因而它的的象是亏格为 1 的光滑曲线, 但由赫尔维茨定理 (参看 [5, Ⅳ.2.4]) 不存在 C 到亏格为 1 的曲线的非平凡态射, 这个矛盾说明 μ' 是平凡的, 即经过 Spec$k$。

上面各结论对任意域 K 上的光滑曲线 C 也成立, 只是需要 C 上有一个 K-点以保证 $\mathcal{P}ic^0(C/K)$ 为精细参量空间及建立 μ。总之有

命题 1. 设 C 为域 K 上亏格为 g 的光滑完备曲线且有一个 K-点, 则有正合列

$$0 \to \mathcal{P}ic^0(C/K) \to \mathcal{P}ic(C/K) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0 \tag{11}$$

其中 $\mathcal{P}ic^0(C/K)$ 为 K 上的 g 维阿贝尔簇而 $\mathbb{Z}$ 视作 K 上的离散群概形。此外有双有理满态射 $C^g/\mathfrak{S}_g \to \mathcal{D}iv^g(C/K) \to \mathcal{P}ic^0(C/K)$, 且 $\mathcal{P}ic^0(C/K) \cong Alb(C)$。当 $g > 0$ 时典范态射 $\mu_C : C \to Alb(C)$ 为闭嵌入, 而当 $g = 1$ 时 μ_C 为同构。

我们将 $\mathcal{P}ic^0(C/K)$ 称作 C 的**雅可比簇** (Jacobian), 记为 $Jac(C)$。

注 3. 设 C 为代数闭域 k 上的完备光滑曲线, 一般记 $\mathrm{Div}(C) = \mathcal{D}iv(C/k)(k)$, $\mathrm{Pic}(C) = \mathcal{P}ic(C/k)(k)$, 即有效除子半群与除子类群 (皮卡群)。对任意闭点 $P \in C$, $C - \{P\}$ 是仿射的。定义 $\phi : \mathrm{Div}(C - \{P\}) \to \mathrm{Pic}^0(C)$ 为 $\phi(D) = \mathcal{L}(D - \deg(D)P)$, 则易见 ϕ 诱导除子类群 (或皮卡群, 即可逆层或直线丛的同构类群) 的同构 $\mathrm{Pic}(C - \{P\}) \to \mathrm{Pic}^0(C)$。令 $C - \{P\} = \mathrm{Spec}R$, 则 $\mathrm{Pic}(C - \{P\})$ 同构于 R 上的秩 1 局部自由模的同构类群, 或 R 的非零理想类群。对任意 $n > 0$, 有秩 n 局部自由 R-模同构类与 $\mathrm{Pic}(C - \{P\})$ 的典范一一对应。总之 $Jac(C)$ (或其 k-点的集合) 有下面几个意义:

i) C 上 0 次除子的线性等价类群;
ii) C 上的 0 次可逆层 (或 0 次直线丛) 的同构类群;
iii) $Alb(C)$;
iv) $Alb(C')$, 其中 C' 为 k-曲线 (不必是光滑的或完备的) 使得 $K(C') \cong K(C')$;
v) $C - \{P\}$ 的除子类群;
vi) $C - \{P\}$ 的可逆层同构类群;
vii) R 的非零理想类群;
viii) R 上的秩 1 局部自由模的同构类群;
ix) R 上的秩 n 局部自由模的同构类的代表集 $(n > 0)$

其中 $P \in C$ 为任意闭点而 $C - \{P\} \cong \mathrm{Spec}R$。

定理 2. 设 X 为代数闭域 k 上的代数簇 (不必是拟射影的), 则 $Alb(X)$ 存在。

证. 我们对 $\dim(X)$ 用归纳法, 不妨设 $\dim(X) > 0$。

任意取定非空光滑开子概形 $U \subset X$。对任意阿贝尔簇 A, 由阿贝尔簇的极小性, 一个有理映射 $\mu : X \dashrightarrow A$ 等价于一个 U 到 A 的态射 (为简明起见仍记为 μ)。记 A_μ 为 A 中 $\mu(U)$ 生成的阿贝尔子簇。首先我们证明存在 N 使得对任意 A, μ 有 $\dim(A_\mu) < N$。不难取一个局部有限有理映射 $X' \dashrightarrow X$ 使得 X' 可以分解为光滑完备曲线丛 $p : X' \to Y$, 其中 Y 为光滑的。由归纳法假设 $Alb(Y)$ 存在。令 g 为 p 的纤维亏格, $d_0 = \dim(Alb(Y))$。给定 A, μ, 任取 p 的闭点上的纤维 C, 则 (由阿贝尔簇的极小性) μ 诱导 $C \to A$, 从而诱导 $Jac(C) \to A$。令 $A' = \mathrm{coker}(Jac(C) \to A)$, 则诱导态射 $q : X' \to A'$ 将 p 的纤维 C 映到一个点, 故由引理 I.1 有态射 $\mu' : Y \to A'$ 使得 $q = \mu' \circ p$。注意 μ' 经过 $Alb(Y)$, 而由推论 I.1.ii) 可知 $A_0 = \mathrm{im}(Alb(Y) \to A')$ 具有阿贝尔簇结构, 其维数不大于 d_0。令 A_1 为 A_0 在 A 中的原象, 则 A_1 具有阿贝尔簇结构且维数 $\leq d_0 + g$, 而 $\mathrm{im}(X' \to A) \subset A_1$, 从而 $\dim(A_\mu) < d_0 + g$。记 d 为 A_μ 的最大可能维数。

对任意阿贝尔簇 A 及任意 $\mu: U \to A$, 定义 $\mu_n: U^n \to A$ 为 $\mu_n(x_1, ..., x_n) = \mu(x_1) + ... + \mu(x_n)$。若 $\dim(\mathrm{im}(\mu_n)) = \dim(\mathrm{im}(\mu_{n+1}))$, 则易见 $\mathrm{im}(\mu_{n+1}) \subset \mathrm{im}(\mu_n) =: A'$, 而 A' 为 A 的阿贝尔子簇, 由于 $\mu(U)$ 生成 A 有 $A' = A$, 即 μ_n 为支配的, 故 μ_d 为支配的。记 $K = K(X^d)$, 即 X^d 的有理函数域。令 K_μ 为 $\mathrm{im}(\mu_d)$ 的函数域, 则 K_μ 可以看作 K 的子域。若有另一个阿贝尔簇 A' 及态射 $\mu': U \to A'$, 则 $\mu'' = (\mu, \mu'): U \to A \times_k A'$ 对应的域 $K_{\mu''}$ 为 K_μ 和 $K_{\mu'}$ 生成的子域。由此可见存在 A, μ 使得 K_μ 最大 (首先有 A, μ 使得 $\mathrm{tr.deg}(K_\mu/k)$ 最大, 其次由诺特正规化引理不难证明 K_μ 在 K 中的代数闭包是 K_μ 的有限扩域), 且不妨设 $A = A_\mu$, 从而 $K_\mu \cong K(A)$。我们来证明 (A, μ) 为 X 的阿尔巴内塞簇。

对任意阿贝尔簇 A' 及任意 $\mu': U \to A'$, 有 $K(A'_{\mu'}) \cong K_{\mu'} \subset K_\mu \cong K(A)$, 这诱导有理映射 $\phi: A \dashrightarrow A'_{\mu'} \to A'$, 由阿贝尔簇的极小性 ϕ 实际上是态射。由定义有 $\phi \circ \mu_d = \mu'_d$, 故 $\phi \circ \mu = \mu'$。注意 ϕ 由 $K_{\mu'} \hookrightarrow K_\mu$ 唯一决定。证毕。

推论 2. 设 X 为代数闭域 k 上的光滑射影簇, 则 $Alb(X) \cong \widehat{\mathcal{P}ic^0(X/k)}$。

证. 记 $Y = \mathcal{P}ic^0(X/k)$, $\mathcal{P}_X$, $\mathcal{P}'_Y$ 分别为 $X \times_k Y$ 和 $\hat{Y} \times_k Y$ 上的泛层, 则有典范态射 $\mu_X: X \to \hat{Y}$ 使得 $(\mu_X \times_k \mathrm{id}_Y)^* \mathcal{P}'_Y \cong \mathcal{P}_X$。我们来验证 $\mu_X(X)$ 生成 $\hat{Y}$。若不然, 则 $\mu_X(X)$ 包含于一个真阿贝尔子簇 $Z \subset \hat{Y}$ 中, 令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{P}'_Y$ 在 $Z \times_K Y$ 上的拉回, 则有态射 $f: Y \to \hat{Z}$ 使得 $(\mathrm{id}_Z \times_k f)^* \mathcal{P}_Z \cong \mathcal{F}$, 令 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{P}_Z$ 在 $X \times_k \hat{Z}$ 上的拉回, 则 $(\mathrm{id}_X \times_k f)^* \mathcal{Q} \cong \mathcal{P}_X$, 而又有 $g: \hat{Z} \to Y$ 使得 $(\mathrm{id}_X \times_k g)^* \mathcal{P}_X \cong \mathcal{Q}$, 故 $(\mathrm{id}_X \times_k (g \circ f))^* \mathcal{P}_X \cong \mathcal{P}_X$, 从而由 $\mathcal{P}_X$ 的泛性有 $g \circ f = \mathrm{id}_Y$, 但 $\dim(g \circ f(Y)) \leq \dim(\hat{Z}) = \dim(Z) < \dim(Y)$, 矛盾。

设 A 为 k 上的阿贝尔簇而 $\mu: X \to A$ 为 k-态射, 则由定义有交换图

$$\begin{array}{ccccc} X \times_k Y & \xleftarrow{\mathrm{id}_X \times_k \hat{\mu}} & X \times_k \hat{A} & \xrightarrow{\mu \times_k \mathrm{id}_{\hat{A}}} & A \times_k \hat{A} \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_X \times_k \mathrm{id}_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_X \times_k \mathrm{id}_{\hat{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A \times_k \mathrm{id}_{\hat{A}}} \\ \hat{Y} \times_k Y & \xleftarrow{\mathrm{id}_{\hat{Y}} \times_k \hat{\mu}} & \hat{Y} \times_k \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\hat{\mu}} \times_k \mathrm{id}_{\hat{A}}} & \hat{\hat{A}} \times_k \hat{A} \end{array} \tag{12}$$

注意 μ_A 为同构, 令 $\phi = \mu_A^{-1} \circ \hat{\hat{\mu}}: \hat{Y} \to A$, 则有 $\phi \circ \mu_X = \mu$。最后, 由 $\mu_X(X)$ 生成 $\hat{Y}$ 及推论 I.1.ii) 得到 ϕ 的唯一性。证毕。

3. 阿贝尔簇的参量空间与志村簇

3.1. 阿贝尔簇的参量空间. 对阿贝尔簇的分类研究导致参量空间的建立, 这方面的工作内容丰富且有很强的技术性, 我们仅作一个简单的介绍。

一个阿贝尔簇连同一个极化称为一个极化阿贝尔簇 (*polarized abelian variety*)。下面将看到, 可以建立极化阿贝尔簇的参量空间。人们早就发现高维阿贝尔簇与椭圆曲线的一个不同之处, 就是不能建立一个所有 g 维复阿贝尔簇的参量空间 (即使是粗糙参量空间), 对此可以这样理解: 我们知道一个复阿贝尔簇 $\mathbb{C}^g/\Lambda$ 的极化可看作格 Λ 上的一个黎曼型, 这样极化阿贝尔簇的同构分类就等价于黎曼型的等价分类, 而同一个复阿贝尔簇有多个极化, 如果把它们等同起来, 就是对同一个格上的所有黎曼型看作相互等价, 这样就给出极化阿贝尔簇的参量空间上的一个等价关系, 而极化阿贝尔簇的参量空间模这个等价关系所得的集合就可以看作阿贝尔簇的同构类的集合, 但这样得到的集合上的诱导拓扑不是 Hausdorff 的, 这一事实在 19 世纪就已经知道了。

我们下面的讨论都是针对极化阿贝尔簇的范畴。注意若 $f: X \to Y$ 是阿贝尔簇的同源而 $\mathcal{L}$ 是 Y 上的可逆层, 则 $\phi_{f^*\mathcal{L}} = \hat{f} \circ \phi_{\mathcal{L}} \circ f$ (见 I.4 节 (5) 式), 特别地, 若 f 是 X 的自同构而 λ 是 X 的一个极化, 则我们称极化 $\hat{f} \circ \lambda \circ f$ 与 λ 等价。

仿照复椭圆曲线的分类方法，可以建立黎曼型的等价类的粗糙参量空间，即 Siegel 模空间，而 Siegel 模形式给出 Siegel 模空间的射影坐标，由此可见 Siegel 模空间是拟射影簇。

对椭圆曲线，我们知道在等价之下有唯一的主极化，因此椭圆曲线的参量空间就是主极化椭圆曲线的参量空间。而高维阿贝尔簇的情形不同，一个 $g>1$ 维阿贝尔簇不一定有主极化，故需考虑非主极化，一般是固定极化的次数 d^2（回忆极化的次数是平方数）而考虑所有 d^2 次极化阿贝尔簇，它们有一个粗糙参量空间（Siegel 模空间），记为 $\mathcal{A}_{g,d}$（即使对 $g=1$ 也存在），而所有 $\mathcal{A}_{g,d}$ 的并可以看作极化阿贝尔簇的参量空间。

对给定的 $g>1$ 和 d，一般的 g 维阿贝尔簇只有有限多个 d^2 次极化，但少数 g 维阿贝尔簇却无限多个 d^2 次极化（这有助于理解为什么不存在所有 g 维复阿贝尔簇的同构类的参量空间）。

为了建立精细参量空间，与椭圆曲线类似地可加上 level 结构。一个 g 维阿贝尔簇 X 的 level n-结构是指一个同构 $X[n]\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$（参看引言和 I.1 节）。我们有

定理 1. 对任意给定的 $g\geq 1$, $d\geq 1$, $n\geq 1$，所有带有 d^2 次极化和 level n-结构的阿贝尔簇的同构类有一个粗糙参量空间 $\mathcal{A}_{g,d,n}$，且当 $n\geq 3$ 时为精细参量空间。对足够大的整数 w，可选有限多个权为 w 的（对某个模群的）Siegel 模形式，使得它们给出 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 到某个复射影空间的解析嵌入，其象为 Zariski 局部闭子集。

我们知道 $\mathcal{A}_{1,1}\cong\mathbb{C}$，可以将它紧致化为 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$，并令无穷远点代表 $\mathbb{G}_{m/\mathbb{C}}$，看作"退化的复环面"，这是将 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 理解为交换群簇的一个参量空间的唯一方法，例如 $\mathbb{C}$ 上的三次射影曲线族 $Y^2Z=X(X-Z)(X-\lambda Z)$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ 的皮卡概形诱导态射 $\mathbb{C}\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$，将 $0,1$ 映到无穷远点，而当 $\lambda=0$ 或 1 时曲线的皮卡簇同构于 $\mathbb{G}_{m/\mathbb{C}}$。

对一般的 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 也有类似的自然的紧致化（最早由佐武一郎建立，故称为 Satake 紧致化），将 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 紧致化为射影簇，在紧致化中所加上的点称为"cusp"点，它们代表"半阿贝尔簇"，即阿贝尔簇通过某个 $\mathbb{G}^r_{m/\mathbb{C}}$ 的扩张。

上个世纪 60 年代后期，Mumford 用代数方法建立了上述参量空间。方法的梗概如下。首先，通过对不变量的分析可以控制阿贝尔簇的希尔伯特多项式，这样就可以在希尔伯特概形中得到一个局部闭子概形 U，它的点代表 g 维 d^2 次极化阿贝尔簇连同其到某个 $\mathbb{P}^N$ 的闭嵌入。下一步是要将 U 中所有代表相互同构的 g 维 d^2 次极化阿贝尔簇的点等同起来，这样得到 U 中的一个等价关系 $\sim_U$，需要建立商空间 $U/\sim_U$。对此可分为两步：注意对一个给定的阿贝尔簇 X，一个闭嵌入 $X\to\mathbb{P}^N$ 相当于 X 上的一个极丰富层 $\mathcal{L}$ 连同 $\Gamma(X,\mathcal{L})$ 的 $N+1$ 个截口。如果固定 $\mathcal{L}$，则 $N+1$ 个截口的不同取法相差一个 GL_{N+1} 的元的作用，这样得到 PGL_{N+1} 在 U 上的一个作用（注意对所有截口同时乘以同一个可逆元不改变闭嵌入）。用 I.3.5 中介绍的方法，可以构造出 $W=U/PGL_{N+1}$（为此需要适当扩大 U，使其点代表 $m>N+1$ 个闭嵌入，且为 stable 点），而 W 可以看作带有极丰富层的阿贝尔簇的参量空间，两个极丰富层给出同一个极化当且仅当它们相差一个 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 的元，这样得到 W 的一个等价关系 $\sim_W$，而每个 $\sim_W$ 的等价类为阿贝尔簇，所以可用 I.3.5 中介绍的方法得到 $W/\sim_W$（参看 [18]），它就是 $\mathcal{A}_{g,d}$。这样就将 $\mathcal{A}_{g,d}$ 建立在 $\mathbb{Z}$ 上。

为建立精细参量空间仍可加上 level n-结构，不过要注意一般的阿贝尔簇不一定有 level n-结构，如果 X 是域 k 上的阿贝尔簇而 $\mathrm{ch}(k)\nmid n$，则对 k 取一个有限可分扩张 $k\subset k'$ 可以得到 $X\otimes_k k'$ 的一个 level n-结构，X（在 k 上）有 level n-结构是一个强制性的要求；而若 $\mathrm{ch}(k)|n$，则 X 不可能有 level n-结构，故只能将 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 建立在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 上，但可通过取不同的 n 使 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 包括所有阿贝尔簇。

定理 2. 对任意给定的 $g\geq 1$, $d\geq 1$, $n\geq 1$，所有特征 $\nmid n$ 的域上的带有 d^2 次极化和 level n-结构的阿贝尔簇的同构类有一个粗糙参量概形 $\mathcal{A}_{g,d,n}$，是一个 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$-拟射影概形，且当 $n\geq 3$ 时为精细参量概形。

对这样给出的 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 也有自然的紧致化（Deligne-Mumford 紧致化），将 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 紧致化为射影概形，在紧致化中所加上的点代表半阿贝尔簇。

若 $m|n$, 则一个 level n-结构自然地给出一个 level m-结构, 这就给出投射 $p_{n,m}:\mathcal{A}_{g,d,n}\to\mathcal{A}_{g,d,m}\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]\subset\mathcal{A}_{g,d,m}$。若 m,n 为互素的整数, 则对任意 $g\geq 1$, $d\geq 1$ 有交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A}_{g,d,mn} & \xrightarrow{p_{mn,n}} & \mathcal{A}_{g,d,n}\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]\\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_{mn,m}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_{n,1}}\\ \mathcal{A}_{g,d,m}\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}] & \xrightarrow{p_{m,1}} & \mathcal{A}_{g,d}\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]\end{array}\tag{1}$$

这个交换图是一个"推出", 即对任意概形 S 和任意态射 $p_m:\mathcal{A}_{g,d,m}\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]\to S$, $p_n:\mathcal{A}_{g,d,n}\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]\to S$, 如果 $p_m\circ p_{mn,m}=p_n\circ p_{mn,n}$, 则存在唯一态射 $p:\mathcal{A}_{g,d}\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]\to S$ 使得 $p_m=p\circ p_{m,1}$, $p_n=p\circ p_{n,1}$。注意当 $n>2$ 时 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 为精细参量概形, 故粗糙参量概形 $\mathcal{A}_{g,d}$ 由精细参量概形 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ (取多个同的 n) 完全决定。

3.2. 希尔伯特-Blumenthal 参量空间和 PEL 参量空间. 如同在引言中提到的对有复乘的椭圆曲线的分类一样, 对阿贝尔簇的分类也可以加上对自同态环的要求。若 $g>1$, "有复乘"的说法不很合适, 例如一条有复乘的椭圆曲线和一条没有复乘的椭圆曲线的直积, 其实一般是不作为"有复乘"考虑的。较好的术语是"有足够复乘"或"CM 型", 指的是一个 g 维阿贝尔簇 X 的自同态环有一个秩为 $2g$ 的交换单子环 (由 I.4 节可见这是最大的可能)。

设 X 是域 k 上的阿贝尔簇。易见任意 $\phi\in End(X)$ 作用于 $Lie(X)$ 上, 因此 $End(X)$ 作用于 $Lie(X)$ 上, 若取定 $Lie(X)$ 的一个非零元, 这就给出一个 k-线性空间的同态 $End(X)\otimes k\to Lie(X)$。

取定一个 g 次全实扩域 $F\supset\mathbb{Q}$, 令 O_F 为 F 的整数环。考虑所有有 O_F 作用的 g 维阿贝尔簇 X (即 $End(X)$ 包含同构于 O_F 的子环) 的分类, 详言之, 对任一域 k 考虑所有三素组 (X,λ,ϵ), 其中 X 为 k 上的 g 维阿贝尔簇, λ 为 X 的 d^2 次极化, $\epsilon:O_F\to End(X)$ 为单同态, 满足相容性条件:

i) ϵ 的象在 λ 给出的 Rosati 对合 $\alpha\mapsto\lambda^{-1}\circ\hat{\alpha}\circ\lambda$ 下保持不变;
ii) ϵ 诱导 k-线性空间的同构 $O_F\otimes k\to Lie(X)$。

由上节的定理 2 不难推出, 这样的三素组有一个粗糙参量空间, 为 $\mathbb{Z}$ 上的拟射影概形, 称为一个希尔伯特-*Blumenthal* 参量空间 (*Hilbert-Blumenthal moduli*)。

为建立精细参量空间也可以加上 level 结构, 不过与上节的情形有所不同: 对任意整数 n, O_F 作用于 $X[n]$ 上, 因此 $X[n]$ 有一个 O_F-模结构, 所以对 level n-结构, 一般是固定 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ 的一个 O_K-模结构 M, 定义一个 level n-结构为一个 O_F-模同构 $X[n]\to M$。此外, n 可以换为 O_F 的一个理想 I, 记 $X[I]$ 为 I 中所有元的核的交, 固定一个 O_F-模 M, 定义 X 的一个 level I-结构为一个 O_F-模同构 $X[I]\to M$。这样定义的 level 结构比上节的定义细致。对极化也不一定是固定次数, 可以固定其核的结构, 这样的要求也比只对次数的要求更细致。

对任意域 k 考虑所有四素组 $(X,\lambda,\epsilon,\phi)$, 其中 X 为 k 上的 g 维阿贝尔簇, λ 为 X 的具有给定核结构的极化, $\epsilon:O_F\to End(X)$ 为单同态, ϕ 为一个 level I-结构, 满足上面两个相容性条件。所有这样的四素组有一个粗糙参量概形, 是某个 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 上的拟射影概形, 且当 I 足够好时为精细参量概形。

上面的结够还没有涉及复乘 (仅有 O_F 的"实乘")。为引进复乘, 由 I.4 节中 $End(X)$ 的结构分类, 可取其中一个类型的 $\mathbb{Q}$ 上的有限维单代数 D, D 有一个对合 $\alpha\mapsto\alpha^*$。令 $F\subset D$ 为中心, 并取 D 的一个极大 order O, 将上面要求的 ϵ 改为单同态 $\epsilon:O\to End(X)$, 并将相容性条件 i) 改为

i$'$) $\lambda\circ\epsilon(\alpha^*)=\widehat{\epsilon(\alpha)}\circ\lambda$

对这样的三素组 (X,λ,ϵ) 也可以建立参量概形, 称为 *PEL* 参量空间, 详情与上面的希尔伯特-Blumenthal 参量空间类似, 这里从略。

3.3. 志村簇. 在引言中提及椭圆曲线的同源等价分类,特别是有复乘的情形,对此可以推广到高维 CM 型阿贝尔簇。

我们已看到同源是阿贝尔簇的等价关系。仍记 $End^0(X) = End(X) \otimes \mathbb{Q}$。若 X 与 Y 同源等价, 则有 $End^0(X) \cong End^0(Y)$ (尽管 $End(X)$ 不一定同构于 $End(Y)$), 这是因为若 $f: X \to Y$ 是一个同源, 则 $\phi \mapsto f \circ \phi \circ f^{-1}$ 就给出一个同构 $End^0(X) \to End^0(Y)$。

取定一个全实域 F 如上, 我们考虑的对象为阿贝尔簇 X 连同一个单同态 $\epsilon: O_F \to End(X)$, 若 Y 是另一个对象, 令 $Mor(X,Y) = Hom_{O_F}(X,Y) \otimes \mathbb{Q}$ (这样, 同构的意义就与阿贝尔簇的范畴不同了)。设 λ, λ' 为 X 的两个极化, 若存在 F 中的全正元 a 使得 $\lambda' = \lambda \circ \epsilon(a)$, 则称 λ 与 λ' 等价, 注意若 $f \in End(X)$ 而 $\lambda = \phi_{\mathcal{L}}$ 则 $\phi_{f^*\mathcal{L}} = \hat{f} \circ \phi_{\mathcal{L}} \circ f$ (见 I.4 节 (5) 式), 若 $f = \epsilon(\alpha)$, 则有

$$\epsilon(\alpha^*\alpha) = \lambda^{-1} \circ \hat{f} \circ \lambda \circ f = \lambda^{-1} \circ \phi_{f^*\mathcal{L}} \tag{2}$$

而 $\alpha^*\alpha \in F$ 是全实的, 故 $\phi_{f^*\mathcal{L}}$ 与 $\phi_{\mathcal{L}}$ 等价。

对 level 结构的处理较为复杂, 需要用到 Tate 模。若 X 是特征 0 的代数闭域上的阿贝尔簇, 则对任意正整数 m, n, n_X 诱导满同态 $X[mn] \to X[m]$ (因为 n_X 是满同态)。令 $T(X) = \varinjlim_n X[n]$, 称为 X 的Tate 模, 它有诱导的 O_F-模结构。记 $\mathbb{A}^{(\infty)}$ 为 adele 环的无限部份, $F^{(\infty)} = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^{(\infty)}$, 则 $T(X) \otimes \mathbb{A}^{(\infty)}$ 为秩 2 自由 $F^{(\infty)}$-模, 一个同构 $\eta: T(X) \otimes \mathbb{A}^{(\infty)} \to (F^{(\infty)})^2$ 称为一个全 level 结构, 设 $K \subset GL_2(\mathbb{A}^{(\infty)})$ 为紧致开子群, 则 $\bar{\eta} = \eta K$ 称为一个 level K-结构。

考虑所有三素组 $(X, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$, 其中 X 为上述阿贝尔簇, 看作上述范畴的对象, $\bar{\lambda}$ 为极化的等价类, $\bar{\eta}$ 为 level K-结构。对这样的三素组 (固定维数, F, $\bar{\lambda}$ 的核的结构和 K) 也可以建立参量概形, 称为志村簇 (Shimura variety)。每个志村簇给出一类阿贝尔簇的同源等价分类。