作为参量空间的志村簇

0. 引言

我们先来回顾黎曼对椭圆曲线的分类工作。

"椭圆曲线"一词来源于椭圆函数。椭圆函数是由椭圆积分 (在计算椭圆弧长时出现的积分) 产生的, 在历史上, 分析学家们知道椭圆积分是不能用出等函数表示的, 后来从复分析的角度研究, 发现了很多有趣的性质, 特别是"双周期性" (参看 [17])。例如令 $\wp$ 为 $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+at+b}}$ (其中 $4a^3+27b^2\neq 0$) 的反函数, 则 $\wp$ 可以开拓成复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个半纯函数 (称为一个"魏尔斯特拉斯 $\wp$-函数"), 且显然 $\wp$ 满足常微分方程 $\wp'^2=\wp^3+a\wp+b$。存在 $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{C}$, τ_1/τ_2 为虚数, 使得 $\wp(z+\tau_1)=\wp(z+\tau_2)=\wp(z)$。取 τ_1,τ_2 为 $\wp$ 的一组周期, 即对任意复数 τ, 若 $\wp(z+\tau)=\wp(z)$ 则 τ 为 τ_1 和 τ_2 的整系数线性组合。令 $\Lambda\subset\mathbb{C}$ 为 τ_1,τ_2 的所有整系数线性组合组成的加法子群 (称为一个格), 则显然 $T=\mathbb{C}/\Lambda$ 为 1 维紧致复李群, 其拓扑结构为环面 (参看图 1)。定义映射 $p:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, 将 z 映到 $(1:\wp(z):\wp'(z))$ (若 z 为 $\wp$ 的极点则将 z 映到某个无穷远点), 则 p 诱导一个解析映射 $e:T\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, 它是解析的闭嵌入, 而 e 的象为三次光滑曲线 $Y^2Z=X^3+aXZ^2+bZ^3$ (参看习题 1, 注意复射影空间中的光滑曲线为 1 维紧致复流形, 即紧致黎曼面)。

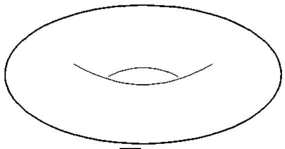

图 1

设 $\Lambda\subset\mathbb{C}$ 为由 $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{C}$ 生成的格, 令 $\Lambda'\subset\mathbb{C}$ 为由 1 和 $\tau=\tau_2/\tau_1$ 生成的格, 则显然有复李群同构 $\mathbb{C}/\Lambda\cong\mathbb{C}/\Lambda'$, 故在研究 $\mathbb{C}/\Lambda$ 时不妨设 $\tau_1=1$。定义魏尔斯特拉斯 $\wp$-函数

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{1}$$

显然 $\wp$ 以 Λ 为周期 (即对任意 $\omega\in\Lambda$ 有 $\wp(z+\omega)=\wp(z)$), 因而 $\wp'(z)=\sum\limits_{\omega\in\Lambda}(\frac{-2}{(z-\omega)^3}$ 也以 Λ 为周期, 且不难验证 $\wp$ 和 $\wp'$ 满足方程

$$(\wp')^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3 \tag{2}$$

其中

$$g_2=60\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^4}\ ,\quad g_3=140\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^6} \tag{3}$$

象上面一样, $z\mapsto(1:\wp(z):\wp'(z))$ 给出闭嵌入 $\mathbb{C}/\Lambda\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, 其象为三次曲线 $Y^2Z=4X^3-g_2XZ^2-g_3Z^3$。这就是说, 对任意格 $\Lambda\subset\mathbb{C}$, $\mathbb{C}/\Lambda$ 解析同构于 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 中的一条三次光滑曲线。反之, 由上所述可见对 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 中的任意三次光滑曲线 E (其方程总可以通过线性坐标变换化为形如 $Y^2Z=X^3+aXZ^2+bZ^3$), 存在一个格 $\Lambda\subset\mathbb{C}$ 使得 E 解析同构于 $\mathbb{C}/\Lambda$。

引理 1. 设格 $\Lambda\subset\mathbb{C}$, 格 $\Lambda'\subset\mathbb{C}$ 分别由 $\{\tau_1,\tau_2\}$ 和 $\{\tau_1',\tau_2'\}$ 生成, $E=\mathbb{C}/\Lambda$, $E'=\mathbb{C}/\Lambda'$。则一个非平凡 (即不是映到一个点的) 解析映射 $f:E\to E'$ 等价于一个非平凡 $\mathbb{C}$-线性映射 $\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, 使得 $\phi(\Lambda)\subset\phi(0)+\Lambda'$。

想象在黎曼的时代人们可能是这样证明的: 注意 $\mathbb{C}$ 可以看作 E 和 E' 的通用覆盖空间, 可见 f 诱导一个解析映射 $\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, 再注意 ϕ 的周期性, 可见存在正实数 M 使得 $|\phi(z)|\le M|z|$, 故 $\frac{\phi(z)-\phi(0)}{z}$ 为有界全纯函数, 从而是常数。从李群的角度也可以这样证明: 注意 E,E' 为紧致复李群, 由刚性引理 (见下章) 可知 $f(z)=f(0)+g(z)$, 其中 g 为李群的同态, 它诱导李代数同态 $Lie(E)\to Lie(E')$, 再注意投射 $\mathbb{C}\to E$ 可以看作指数映射 $\exp:Lie(E)\to E$, 由交换图

$$\begin{array}{ccc} Lie(E) & \xrightarrow{g_*} & Lie(E') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exp} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ E & \xrightarrow{g} & E' \end{array}$$

即可见 g 由线性映射 g_* 诱导。由此还可见两条椭圆曲线作为复流形同构当且仅当它们作为复李群是同构的。

由引理 1 可知, 椭圆曲线的同构分类等价于格的线性等价分类。

由于 $\tau_2\cdot:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是解析同构, 我们有 $E\cong\Lambda/\{\tau,1\}$, 其中 $\tau=\frac{\tau_1}{\tau_2}$ 为虚数, 而且不妨设 $\mathrm{Im}(\tau)>0$ (否则可用 $-\tau$ 代替), 故在同构分类的研究中不妨设 $\Lambda=\{\tau,1\}$ (其中 $\tau\in\mathfrak{H}$, 即上半复平面), 并记 $E=E_\tau$。同样可将 Λ' 换为由 τ' 和 1 生成的格, 其中 $\tau'=\frac{\tau_1'}{\tau_2'}$, $\mathrm{Im}(\tau')>0$。由引理 1 可见, 一个 (李群的) 非平凡同态 $f:E\to E'$ 由一个整数矩阵 $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 给出 (其中 $ad-bc>0$, 见习题 2), 使得 $\phi(\tau_1)=a\tau_1'+b\tau_2'$, $\phi(\tau_2)=c\tau_1'+d\tau_2'$, 但由 ϕ 的线性可见 $\phi(\tau_1)=\tau\phi(\tau_2)$, 故

$$\tau=\frac{a\tau_1'+b\tau_2'}{c\tau_1'+d\tau_2'}=\frac{a\tau'+b}{c\tau'+d} \tag{4}$$

其中 $\tau'=\frac{\tau_1'}{\tau_2'}$。由此可见, 若存在非平凡同态 $E_\tau\to E_{\tau'}$, 则存在整数 a,b,c,d $(ad-bc>0)$ 使得 (4) 成立, 此时我们说 E_τ 和 $E_{\tau'}$ 是**同源的** (*isogenous*), 而称非平凡同态 $E_\tau\to E_{\tau'}$ 为**同源** (*isogeny*)。注意由 (4) 可以得到整数 a',b',c',d' $(a'd'-b'c'>0)$ 使得 $\tau'=\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}$, 由此易见同源是一个等价条件。

特别地, f 为同构当且仅当 $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 此时由 (4) 可见 $ad-bc=1$ (见习题 2), 故 $E_\tau\cong E_{\tau'}$ 当且仅当存在

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}) \tag{5}$$

使得 $\gamma(\tau)=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}=\tau'$。这样我们得到 $SL_2(\mathbb{Z})$ 在 $\mathfrak{H}$ 上的一个作用 $\gamma(\tau)=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, 而 Λ 的等价类和 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的轨迹, 即 $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ 的点一一对应。这样 $\mathcal{A}_1=\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ 就和椭圆曲线的解析同构类一一对应。我们称 $\mathcal{A}_1$ 为 (复) 椭圆曲线的**粗糙参量空间** (*coarse moduli space*), 这一术语的来历是这样的: 设 f 为 $\mathfrak{H}$ 上的一个半纯函数, 若对任意形如 (5) 的 $\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$ 都有 $f(\gamma(z))=(cz+d)^{2w}f(z)$, 则称 f 为一个权为 w 的**模形式**。两个权为 w 的模形式的商在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的作用下不变, 故可以看作 $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z})=\mathcal{A}_1$ 上的半纯函数 (称为**模函数**)。用多个权为 w 的模形式可以给出 $\mathcal{A}_1$ 到复射影空间的解析映射, 对足够大的 w 可使这样一个映射为局部闭嵌入。因此模形式可以看作 $\mathcal{A}_1$ 作为拟射影簇的齐次坐标。

由 (4) 还可见 E_τ 与 $E_{\tau'}$ 同源当且仅当存在 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Q})$ 使得 $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \tau'$, 所以 $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Q})$ 与椭圆曲线的同源等价类一一对应。但由于 $SL_2(\mathbb{Q})$ 不是离散群, 我们不能得到 $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Q})$ 的一个自然的解析空间结构。不过在下面我们将看到, 如果考虑"有复乘"的椭圆曲线, 还是可以得到同源等价类的有解析结构的参量空间的。

今天人们将任意代数闭域 k 上的射影平面中的三次光滑曲线称为**椭圆曲线**。注意椭圆曲线的亏格为 1; 反之, 由黎曼-罗赫定理不难证明 k 上的任意亏格为 1 的射影光滑曲线可以嵌入 $\mathbb{P}_k^2$ 作为三次曲线。由此我们也将 k 上的任意亏格为 1 的射影光滑曲线称为椭圆曲线。任意 k 上的椭圆曲线 E 也有群结构, 可以这样定义 (参看图 2): 任取 E 的一点作为零元, 记为 0 (在图 2 中取的是无穷远点), 注意 0 是 E 的过 0 的切线 l (在图 2 中为无穷远线) 与 E 的 3 重交点。对任一点 $x \neq 0 \in E$, 由 Bézout 定理可知直线 $0x$ 与 E 的交点个数 (连重数) 为 3, 令 $-x$ 为 $0x$ 与 E 的第三个交点 (若 $0x$ 与 E 在点 x 相切, 则令 $-x = x$, 注意 $0x$ 不会与 E 在点 0 相切, 因为过 0 的切线为 l, 而 l 与 E 只有一个公共点)。对任意两点 $x, y \in E$, 令直线 xy 与 E 的另一个交点为 $-(x+y)$ (若 xy 与 E 相切则令切点为 $-(x+y)$), 这样连结 $-(x+y)$ 与 0 的直线与 E 的第三个交点就是 $x+y$。

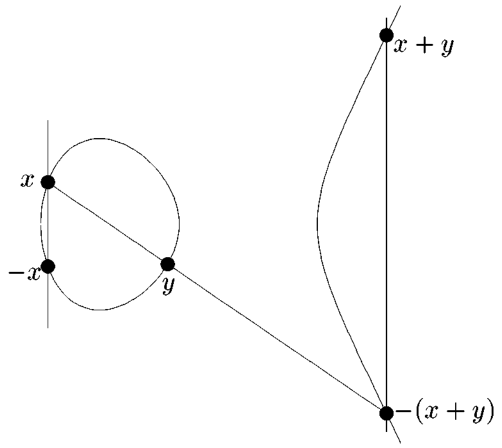

图 2

我们后面将看到这给出 E 的一个群结构 (见第 2 章, 或参看例如 [15, 引理 4.3.1])。这个群结构是交换的, 可除的, 而且是代数的, 即对任意 $x, y \in E$, $x+y$ 的坐标是 x 和 y 的坐标的代数函数。

若 k 是特征非 2 的代数闭域, 通过射影线性变换, $\mathbb{P}_k^2$ 上的任意三次光滑曲线 E 的方程可以化为形如 (参看 [8, p.103])
$$Y^2 Z = X(X-Z)(X-\lambda Z) \tag{6}$$
令
$$j = j(E) = \frac{2^8(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2} \tag{7}$$
称为椭圆曲线 E 的 **j-不变量**。可以证明, j-不变量由椭圆曲线的同构类唯一决定, 且对任意 $a \in k$ 有一条 k-椭圆曲线的 j-不变量为 a。(当 $\mathrm{ch}(k) = 2$ 时需要另外定义 j-不变量。) 因此可以用 j-不变量来对椭圆曲线作同构分类 (就是说给出 k-椭圆曲线的同构类与 k 间的一个一一对应)。

这样我们就有椭圆曲线的两种分类方法: 用 $\mathcal{A}_1$ 的点对椭圆曲线作解析同构分类, 和用 j-不变量对椭圆曲线作代数同构分类。这两种分类是等价的 (参看 [33]): 定义映射 $\phi : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{C}$, 将 E_τ 的代表点 (即 τ 的 $SL_2(\mathbb{Z})$-轨迹) 映到 $j(E_\tau)$, 则 ϕ 是解析空间的同构。我们可以将 j-不变量

理解为一种"连续不变量", 但我们下面将看到, 用空间的点来分类的想法比用不变量来分类的想法高明得多, 因为在一般情形会有很多不变量, 这些不变量可能不是独立的, 而是满足一些关系, 况且这些不变量还可能是局部的, 即不能对所有的对象同时定义 (相当于参量空间的局部坐标)。

作为一个集合, $\mathcal{A}_1$ 的点集与椭圆曲线的同构类一一对应, 但 $\mathcal{A}_1$ 还有解析流形结构, 这个结构可以这样理解: 设 T 是任一复解析空间, $p:\mathcal{E}\to T$ 是"一族椭圆曲线", 就是说, $\mathcal{E}$ 是复解析空间, p 是光滑解析映射, 且 p 的每一纤维 $p^{-1}(t)$ $(t\in T)$ 都是椭圆曲线。由于 $\mathcal{A}_1$ 的点代表椭圆曲线的同构类, 可以得到一个映射 $\phi: T\to\mathcal{A}_1$, 将 $t\in T$ 映到 $p^{-1}(t)$ 的代表点。我们将看到 ϕ 是一个**解析映射** (见第 2 章), 这就是 $\mathcal{A}_1$ 的解析结构的意义。

解析分类和代数分类的方法各有用处, 模形式和自守表示等主要是沿解析的道路深入研究, 我们已看到其重要性; 而代数方法的好处是可以将分类空间 (即参量空间) "建立在 $\mathbb{Z}$ 上", 换言之, 可以采用一组自然的坐标, 使得参量空间可以表为一组**整系数**多项式的公共零点集。特别地, 对特征非零的域上的椭圆曲线也可以建立参量空间。

下面我们考虑带有一些附加结构的椭圆曲线, 由此可以更细致地看分类问题并引向志村簇。

一种附加结构是所谓"level structure"。将任一椭圆曲线 E 看作加法群, 对任意整数 n 记 $E[n]=\ker(n_E)$, 其中 $n_E: E\to E$ 将 $x\in E$ 映到 nx (为群同态)。对复椭圆曲线 $E=\mathbb{C}/\Lambda$ (看作李群), 易见 $E[n]=\frac{1}{n}\Lambda/\Lambda\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$。可以证明, 若 k 是代数闭域, $\mathrm{ch}(k)\nmid n$, 则也有 $E[n]\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, 这样一个同构称为 E 的一个*level n-结构* (*level n-structure*)。注意 E 有有限多个互不相同的 level n-结构, 它们相互相差一个 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ 的自同构 (即 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的元的作用)。若 $\mathrm{ch}(k)=p>0$, 则 $E[p]$ 一定不同构于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, 我们将看到 (见下章) 这是因为 $E[p]$ 有"无穷小部份"。有两种可能: 或者 E 有 p 阶点, 此时 E 称为*正常的* (*ordinary*), 或者 E 没有 p 阶点, 此时 E 称为*超奇的* (*supersingular*)。可以定义所谓"level p-结构" (见 [1]), 但颇不简单。

现在来看带有 level n-结构的椭圆曲线的分类, 即考虑所有对 (E,η), 其中 E 为椭圆曲线, $\eta: E[n]\to(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ 为 E 的 level n-结构。在复椭圆曲线的情形, 仍不妨设 $E=E_\tau=\mathbb{C}/\Lambda$, 其中 Λ 由 τ 和 1 生成, 此时可取 $\frac{\tau}{n}$ 和 $\frac{1}{n}$ 在 E 中的象为 $E[n]$ 的生成元, 对任意整数 m 使得 $0<m<n$, $\gcd(m,n)=1$, 可以给出一个"标准的" level n-结构 $\eta_m: E[n]\to(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, 使得 $\eta_m(\frac{\tau}{n})=(1,0)$, $\eta_m(\frac{1}{n})=(0,m)$。易见 E 的所有 level n-结构都等于某个 η_m (对适当选择的 τ 和 m, 见习题 3), 这样可取 $\mathfrak{H}$ 的 $\phi(n)$ 个拷贝 (ϕ 为 Euler 函数) $\mathfrak{H}_m\cong\mathfrak{H}$, 使 $\tau\in\mathfrak{H}_m$ 代表 (E_τ,η_m)。对任意 η_m, 任意 $\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$ 在 E 上的作用 (仍记为 γ) 给出一个 level n-结构 $\eta_m\circ\gamma=\bar{\gamma}\circ\eta_m$, 其中 $\bar{\gamma}$ 为 γ 在 $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 中的象。若 $\eta_m\circ\gamma=\eta'_{m'}$, 则有 $m'=m\det(\gamma)=m$, 这说明 $SL_2(\mathbb{Z})$ 作用于每个 $\mathfrak{H}_m$ 上 (不会将 $\mathfrak{H}_m$ 的点映到 $\mathfrak{H}_{m'}$, $m'\neq m$)。此外, $\eta_m\circ\gamma=\eta_m$ 当且仅当 $\bar{\gamma}=\mathrm{id}\in GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$。令 $\Gamma(n)=\ker(SL_2(\mathbb{Z})\to GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$, 则易见

$$\Gamma(n)=\{\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})|\gamma\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\pmod n\}\tag{7}$$

由上所述可见带有 level n-结构的椭圆曲线 (E,η) 与 $\mathcal{A}_{1,n}:=\coprod_m\mathfrak{H}_m/\Gamma(n)$ 的点一一对应, 我们称 $\mathcal{A}_{1,n}$ 为带有 level n-结构的椭圆曲线的粗糙参量空间。如果要建立 $\mathcal{A}_{1,n}$ 上的齐次坐标, 可以用 $\Gamma(n)$ 代替 $SL_2(\mathbb{Z})$ 而建立模形式理论。

我们注意 $\mathcal{A}_{1,1}=\mathcal{A}_1$, 而且 $(E,\eta)\mapsto\{E\}$ 给出投射 $\mathcal{A}_{1,n}\to\mathcal{A}_1$, 其次数等于 $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 的阶, 因为每条椭圆曲线有 $|GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|$ 个互不相同的 level n-结构。

用代数的方法可以将 $\mathcal{A}_{1,n}$ 建立在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 上。

另一个附加结构是"复乘"。设 $E=E_\tau=\mathbb{C}/\Lambda$, 若存在虚数 μ 使得

$$\mu\Lambda\subset\Lambda\tag{8}$$

则称 E 为*有复乘的* (*having complex multiplication*), 或 CM 型的 (*CM type*)。此时 μ 诱导 E 的一个自同态 $\bar{\mu}$。由 (8) 可见 $\mu=\mu\cdot 1,\mu\tau\in\Lambda$, 设 $\mu\tau=a\tau+b$, $\mu=c\tau+d$, 则有

$$\tau=\frac{\mu\tau}{\mu}=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\tag{9}$$

从而 τ 满足二次方程

$$c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0 \tag{10}$$

可见 $\mathbb{Q}[\tau]$ 是虚二次域; 反之, 若 $K = \mathbb{Q}[\tau]$ 是虚二次域, 则易见 E 有复乘 (习题 4), 此时我们说 E 有 K 的复乘。

在有复乘 μ 的情形, $End(E)$ 至少包含 $\mathbb{Z}[\mu]$, 故 $End(E)$ 作为 $\mathbb{Z}$-模的秩至少是 2, 实际上 $End(E)$ 的秩是 2。注意此时 $End(E)\otimes\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\tau]$ (而在没有复乘的情形 $End(E) \cong \mathbb{Z}$)。我们常记 $End^0(E) = End(E)\otimes\mathbb{Q}$, 这样 E 有 K 复乘就等价于 $End^0(E) \cong K$。

对给定的虚二次域 K, 若 $E = E_\tau = \mathbb{C}/\Lambda$ 是有 K 复乘的椭圆曲线, 则由上所述不妨设 $\Lambda \subset K$, 为 K 的秩为 2 的自由阿贝尔加法子群 (由 τ 和 1 生成), 称为 K 中的格。若 $E_{\tau'} = \mathbb{C}/\Lambda'$ 也有 K 复乘, 其中 Λ' 也是 K 中的格, 则易见在 K 中对某个正整数有 $r\Lambda' \subset \Lambda$, 这说明 E_τ 与 $E_{\tau'}$ 同源; 反之, 若 E' 与 E 同源, 则 E' 也有 K 复乘。因此, 所有有 K 复乘的椭圆曲线组成一个同源等价类。注意 $End^0(E)$ 可以看作同源等价类的不变量。由引理 1 和上面的讨论还可见, $E_\tau \cong E_{\tau'}$ 当且仅当存在 $\alpha \in K$ 使得在 K 中有 $\Lambda' = \alpha\Lambda$, 此时我们说 Λ' 和 Λ 整体等价 (*globally equivalent*)。由数论可知, K 中的格只有有限多个整体等价类, 因此有 K 复乘的椭圆曲线在同构之下只有有限多个, 它们的代表点组成 $\mathcal{A}_1$ 的一个 (有限) 闭子集。

用代数方法同样可以给出复乘的"整体的"意义: 对任一代数闭域 k 上的椭圆曲线 E, 若 $End(E)$ 的秩不小于 2, 则称 E 是有复乘的。当 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$ 时, 由 l-进表示可知有复乘的情形有两种可能: 若 E 是正常有复乘的则 $End(E)$ 的秩为 2, 此时 $End(E)\otimes\mathbb{Q}$ 为虚二次域; 若 E 是超奇的, 则 E 必有复乘, 且此时 $End(E)$ 的秩为 4, $End(E)\otimes\mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的一个四元数代数, 仅在 p 和 ∞ 两个位分歧。

对给定的虚二次域 K, 若 $End(E)\otimes\mathbb{Q}$ 有一个子域同构于 K, 则称 E 有 K 复乘, 这样就可以考虑 $\mathcal{A}_1$ (或 $\mathcal{A}_{1,n}$) 中的有 K 复乘的点的集合, 它是一个有限的代数子集。注意我们可以将 $\mathcal{A}_1$ 建立在 $\mathbb{Z}$ 上, 用代数几何的语言说, $\mathcal{A}_1$ 是一个"$\mathbb{Z}$-概形" (是 2 维的), 而有 K 复乘的点组成 $\mathcal{A}_1$ 的一个闭子概形 (是 1 维的)。

上面的讨论都可以推广到高维的情形, 即阿贝尔簇。

习题

1. 证明 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 中的三次曲线 $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ 为光滑的当且仅当 $x^3 + ax + b$ 的判别式 $\Delta = -4a^3 - 27b^2 \neq 0$。

2. 设格 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 和 $\Lambda' \subset \mathbb{C}$ 分别由 $\{\tau, 1\}$ 和 $\{\tau', 1\}$ 生成, 其中 $\tau, \tau' \in \mathfrak{H}$。设 $E = \mathbb{C}/\Lambda$, $E' = \mathbb{C}/\Lambda'$, $f: E \to E'$ 为李群的非平凡同态, $f_*(\tau) = a\tau' + b$, $f_*(1) = c\tau' + d$。证明 $ad - bc > 0$。特别地, 若 f 为同构, 则 $ad - bc = 1$。

3. 设 E 为复椭圆曲线, $\eta: E[n] \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ 为 E 的 level n-结构。证明存在 $\tau \in \mathfrak{H}$ 及整数 m $(0 < m < n, \gcd(m,n) = 1)$ 使得 $E \cong \mathbb{C}/\{\tau, 1\}$ 且 $\eta = \eta_m$ (即 $\eta(\frac{\tau}{n}) = (1,0)$, $\eta(\frac{1}{n}) = (0,m)$)。

4. 设 $\tau \in \mathfrak{H}$, 证明若 $\mathbb{Q}[\tau]$ 是虚二次域, 则 E_τ 有复乘。