

数学物理漫谈

周坚

清华大学数学科学系及浙江大学数学科学中心

西部数学论坛

西安, 2005年10月

内容提要

- 1 概论
- 2 数学家与数学物理
- 3 经典物理与数学
- 4 近代物理与数学
- 5 现代物理与数学

内容提要

- 1 概论
- 2 数学家与数学物理
- 3 经典物理与数学
- 4 近代物理与数学
- 5 现代物理与数学

内容提要

- 1 概论
- 2 数学家与数学物理
- 3 经典物理与数学
- 4 近代物理与数学
- 5 现代物理与数学

内容提要

- 1 概论
- 2 数学家与数学物理
- 3 经典物理与数学
- 4 近代物理与数学
- 5 现代物理与数学

内容提要

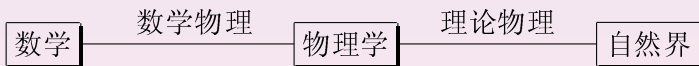
- 1 概论
- 2 数学家与数学物理
- 3 经典物理与数学
- 4 近代物理与数学
- 5 现代物理与数学

数学物理与理论物理

- 江泽民笑了，用英语提问：“能否告诉我数学物理与理论物理的区别？”
- 2004级硕士研究生周晓婷抢先用英语回答：“二者的目的不一样。”牛晖接着补充：“数学物理更依赖数学，而理论物理更关注物理。”

摘自：“深情的关怀 殷切的期望(2005-9-28) ——记江泽民同志视察南开数学研究所”

数学物理与理论物理



为什么会有数学物理？

- 世上本无数学物理，做的人多了，也就有了这门学问。
- 数学和物理本来都来源于对自然界的认识。
- 可是它们自身的发展又往往超出对实际现象和问题的研究，按照理论内在的审美原则自由发展。
- 这种类型的发展和超出表面看来不过是数学家或物理学家自娱自乐的智力游戏，但实际上往往有意想不到的实际应用。

为什么会有数学物理？

- 比如计数是很自然的事情，但数学家热衷于解决如下的问题：

$$x^n + y^n = z^n$$

在 $n > 2$ 时没有非平凡的整数解(费尔玛大定理)。

- 这个问题的结论本身没有任何实际意义。
- 数学家为了解决这个问题发展了庞大的代数数论的理论。
- 这些理论的一部分在现在的计算机时代在密码与编码理论中起着重要作用。

为什么会有数学物理？

- 又比如从土地测量等实际问题发展出平面几何学（古希腊）和微分几何（**Gauss**）。
- 关于平面几何学中有关平行线的第五公设（过直线外一点有且仅有一条平行线）的讨论导致了所谓的非欧几何。
- 这似乎是一个没有现实模型的抽象讨论，但球面几何和双曲几何在现代成像技术（如**CAT**扫描）上有应用。
- 后面会谈到几何学在物理中的一些应用。

为什么会有数学物理？

- 物理学研究中有超越具体现象和问题的理论提出。
- 实验观察到四种基本的作用力：引力，电磁力，弱作用力，强作用力。
- 物理学家如Einstein（爱因斯坦）追求这四种作用力的一个统一的理论。
- 为此他们做着各种尝试，提出各种理论模型。

为什么会有数学物理？

- 评判一个物理模型是否成功的主要标准是是否提供了实验可以验证的预言。
- 这些模型有的做出了预言，但目前的实验条件还无法验证，这部分的物理也许可以称作**理论物理**；
- 有的还处在数学推导的阶段，还没有给出实验可以验证的预言，这部分的物理也许可以称作**数学物理**。

数学家与数学物理

- 数学物理的出现不是很久远的事情。
- 在经典物理发展的时期，除了实验物理学家，物理学家也同时是数学家，如Newton, Lagrange, Laplace, Fourier, Gauss, Maxwell等。
- Einstein有文章发表在数学杂志“Mathematische Annalen”上。
- 数学与物理各自的发展使它们逐渐分离。
- 数学物理是数学家与物理学家可能共同关心的一些领域，近年来逐渐活跃起来。

数学家与数学物理

- 直到近代，一些伟大的数学家也很关心物理学。如Hilbert写过《数学物理方法》，研究过广义相对论；Weyl研究过广义相对论，写过《时间、空间、物质》；Cartan研究过广义相对论；von Neumann研究过量子力学。
- 也有些数学家因为数学物理对数学本身有着推动而研究数学物理，他们并没有很好的物理训练，对所研究的对象的物理意义和物理推导也并不关心。

数学家与数学物理

- 数学家可以骄傲的一个事实是：他们可以按照数学内在的规律去发展数学，而不必关心他们理论的应用。
- 从物理学家那里的反馈是：不是为物理应用而发展的数学理论在物理中更有用。
- 我个人的经验是：受物理学家启发为他们的工作提供严格基础的数学工作虽然在数学上很重要，但不要期望得到物理学家的欣赏和重视。

华人数学家与数学物理

- 陈省身先生40年代访问Princeton高等研究所的时候，Einstein曾在自己办公室向他介绍统一场论的想法，希望他也参加这一方面的研究。
- Einstein在陈先生的信箱里放进自己的文章，可是两个礼拜过去了那文章还躺在那儿。
- Einstein的秘书来提醒陈先生：“怎么可以将Einstein的文章放在信箱里置之不理呢？”
- 陈先生不认为Einstein的想法有道理，没有跟随他做统一场论方面的研究，而是继续自己的数学研究。

华人数学家与数学物理

- 几十年过去了，陈先生所发展的**Chern-Weil**理论和**Chern-Simons**理论在物理中被广泛的应用。
- 而**Einstein**在统一场论方面的努力基本上被认为是失败了，虽然他追求统一理论的思想一直延续了下来，成为现代理论物理和数学物理的指导性思想。
- 有伟大成就的人一定是有主见的人！

华人数学家与数学物理

- 华罗庚先生很重视数学物理的研究，他建议调张宗燧先生入中国科学院数学研究所任一级研究员，兼理论物理研究室主任。
- 张宗燧先生于剑桥大学数学系，受业于著名统计物理学家福勒（R. H. Fowler），曾在波尔（N. Bohr）和泡利（W. Pauli）身边工作。
- 他培养了于敏先生、戴元本先生、侯伯宇先生、朱重远先生等研究生。

华人数学家与数学物理

- 陆启铿先生对数学物理有长期的研究，例如对发现杨振宁先生提出的规范场论与微分几何联络理论的关系做出过重要贡献。
- 他也培养了数学物理研究方面的一些中坚力量。证明了扩充未来光管猜想的周向宇先生和证明过许多猜想的刘克峰先生都曾是他的研究生。

华人数学家与数学物理

- 谷超豪先生在上世纪 70 年代即开始与杨振宁先生合作进行规范场论方面的研究，是我国数学物理研究的开拓者之一。
- 国内还有许多其他从事数学物理研究的前辈数学家，在此不能一一提及了。

华人数学家与数学物理

- 丘成桐先生获得Fields奖的两项工作都与数学物理有关。
- 他与Schoen解决的正质量猜想是广义相对论中的问题。
- 他所证明的Calabi猜想在超弦理论中起关键作用。

华人数学家与数学物理

- 丘先生极力提倡和推动数学物理特别是超弦理论的数学研究。
- 在美国华人数学界有以他的学生为主体的一批青年数学家研究数学物理。
- 在国内，青年学生对这一领域还较为陌生。借此机会，我想做一些宣传。

经典物理与数学

- 经典物理包含力学、热力学和统计力学、电磁学、光学等方面。
- 它们用到传统数学的不同分支，对这些分支的创立和发展起了推动作用。
- 下面做一些简述。

牛顿(Newton)力学与常微分方程组

- 牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 可写作:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}.$$

- 这是一个二阶常微分方程组, 故知由初始位置和初始速度可解出质点任意时刻的位置和速度。

万有引力

- 牛顿的万有引力定律可写作：

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -G \frac{Mm}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = \nabla \left(\frac{GMm}{|\vec{r}|} \right).$$

- 易知能量和角动量

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{GMm}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \dot{\vec{r}}.$$

守恒。由此可推出开普勒(Kepler)三定律。

拉格朗日力学与变分法

- 定义拉格朗日(Lagrange)量

$$L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{GMm}{|\vec{r}|}$$

- 对一路径 $\vec{r}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, 定义拉格朗日积分:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) dt$$

拉格朗日力学与变分法

- 对拉格朗日积分的变分得出Euler-Lagrange方程：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

- 这等价于牛顿的万有引力方程。
- 变分法广泛使用于微分几何中：如测地线、调和映照、Morse理论等。

哈密尔顿力学与辛几何

- 从拉格朗日量可以定义哈密尔顿(Hamilton)量:

$$H := \sum_i p_i q_i - L,$$

where $q_i = x_i$, $p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, $i = 1, 2, 3$.

- 力学量表达为函数 $f(p, q)$, 它的运动方程可以写为:

$$\frac{d}{dt} f(p, q) = \{H, f(p, q)\}.$$

哈密尔顿力学与辛几何

- 此处 $\{\cdot, \cdot\}$ 为如下定义的泊松(Poisson)括号:

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

- 哈密尔顿力学激发了微分几何学中辛几何和泊松几何的发展。
- 通常黎曼几何中, 黎曼度量为一 2 阶 **对称** 张量, 而辛结构或泊松结构为 2 阶 **反称** 张量。

热力学和统计力学

- 我对还没有学过多元微积分的时候学热力学的感觉记忆犹新。相信很多人有类似的经历。
- 统计力学利用概率统计的思想由微观运动推导宏观现象，这促进了概率论和统计学的发展。
- 统计力学也为量子力学的发展打下了思想上的基础。

电磁学与多元微积分

- 电磁学是多元微积分应用的光辉范例。
- 大数学家**Gauss**也参与过它的发展，在电磁学有一个物理量的单位以他命名。
- 电磁学的发展过程中实验起着关键作用，但是将它推到光辉的顶点的却是数学的考虑。
- 麦克斯韦(**Maxwell**)以他的数学功力将一些实验现象总结为一些数学方程。

麦克斯韦方程

- 麦克斯韦基于数学上美的考虑得到的方程最初与物理学家得到的一些定律不符，后来证明是物理学家弄错了。
- 麦克斯韦从他的方程做出了电磁波的预言和光为电磁波的猜想，后来都得到了实验证实。
- 下面四个方程现在被称为麦克斯韦方程：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, & \nabla \cdot \vec{H} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}.\end{aligned}$$

麦克斯韦方程与电磁波

- 在真空中, 有

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0.$$

- 故有

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{E}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{H}.$$

- 即 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 满足波动方程, 由此做出电磁波的预言。

麦克斯韦方程与狭义相对论

- 麦克斯韦方程的研究的另一个重要结果是狭义相对论。
- 法拉第(Faraday)宣扬了作为光的传播的介质的以太的概念。
- 麦克斯韦注意到如果以太是固定的，在不同的参照系下光速不同。
- 这与麦克尔逊(Michelson)的著名实验不符。

麦克斯韦方程与狭义相对论

- 洛伦兹(Lorentz)和爱因斯坦(Einstein)正是在此基础上发展了狭义相对论，给出了新的时空观。
- 闵可夫斯基(Minkowski)给出的数学解释用到线性代数中线性变换的概念：时间和空间构成一个四维空间：

$$\mathbb{R}^4 = \{(t, x, y, z) : t, x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

- 不同参照系之间的坐标由线性变换

$$(t', x', y', z') = (t, x, y, z)A$$

给出（ A 为一四阶方阵），使得

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 (dt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2. \quad \rightarrow \circlearrowleft \circlearrowright$$

麦克斯韦方程与规范场论

- 麦克斯韦在推导他的方程时，用到电磁势的概念。
- 物理学家原来以为这只是一个数学工具，没有物理意义。
- 后来的发展证明，电磁势是更为基本的物理量，除了在实验上有所谓Born-Aharonov效应，在理论上也直接导致规范场论的出现。

近代物理与数学

- 我这里说的近代物理指的是广义相对论、量子力学和规范场论。
- 它们用到上一世纪有大发展的许多数学分支：微分几何、拓扑学、表示论等。

广义相对论以前的微分几何

- Gauss（高斯）由地形测量的问题出发，研究三维空间中的曲面理论。
- 在他的基础上，Riemann（黎曼）提出了微分几何的理论基础。
- 对黎曼几何的研究中出现的张量分析在力学研究中有广泛应用。
- 这时已出现了Christoffel符号等。

广义相对论与微分几何

- 黎曼几何的伟大应用是Einstein（爱因斯坦）创立的广义相对论。
- 广义相对论出发点是用带弯曲Lorentz度量的流形来描述时空，Einstein方程将几何量(Ricci曲率)与物理量（能量—动量张量）联系起来。
- 数学家希尔伯特(Hilbert)用变分法也推导出了真空中的Einstein方程，但他自己说没有哪个数学家可以代替Einstein。

广义相对论的实验证据

- 广义相对论的有以下预言：水星轨道的进动、光线的弯曲、黑洞的存在、引力波等等。
- 水星轨道的进动在广义相对论提出以前就观察到了。
- 广义相对论提出不久，发生了一次日食。一个观测小组观测到了光线在太阳附近的弯曲。
- 当一个学生问他：如果没有得到证实，他会怎么说。爱因斯坦回答：“那么，我只好为亲爱的上帝感到遗憾。无论如何，这个理论是正确的。”

广义相对论的实验证据

- 黑洞也有很多观测证据。有趣的是Hawking和Penrose曾用微分拓扑学论证黑洞的存在性。
- 广义相对论的一个重要推论是动态的宇宙模型：宇宙是膨胀或收缩的。这由哈勃(Hubble)的观测所支持。
- 与此相关的有宇宙的大爆炸起源模型。这个模型的预言之一是宇宙中存在背景辐射，这已被观测到了。
- 引力波的观测是当今一个重要的项目。

广义相对论与现代微分几何

- 广义相对论在数学上的重大意义是极大的促进了微分几何的发展。
- Cartan和Weyl都曾尝试将Einstein的引力理论与Maxwell的电磁理论统一起来，为此他们使用了微分几何中的联络理论。
- 在Cartan的工作中，外微分形式和主丛等几何对象发展起来了，这为微分几何与代数拓扑的结合打下了基础。

陈省身先生与现代微分几何

- 陈省身先生所发展的陈类的理论是一个不朽的光辉顶点。
- 陈先生发扬了Cartan在微分几何中使用外微分形式的传统。
- 他发展的用微分形式表示性类、用微分形式的超度得到二级示性类(Chern-Simons理论、Bott-Chern双重超度)等都是极深刻的思想。
- 在张伟平先生的报告中有更详细的介绍。

陈省身先生与现代微分几何

- 陈先生的工作广泛影响了微分几何、代数几何、代数数论、代数拓扑等多个领域。
- 他的工作被评价为：“其影响遍及所有数学领域。”
- 其中尤为重要是Atiyah、Singer等人发展的指标理论。
- 后面会谈及他们在物理中的应用。

Einstein与丘成桐先生

- 与陈先生不同而与**Cartan**相类似，丘成桐先生先生非常关心物理学。
- 他获得**Fields**奖的两项工作都与**Einstein**有关：一项是广义相对论中的正质量猜想，一项是关于**Kähler-Einstein**度量的**Calabi**猜想。
- 如果**Einstein**找他去谈话会是什么样的场景，只能交给我们的想象力去发挥了。

量子理论与概率论

- 上一世纪五十年代以前与广义相对论媲美的是量子力学。
- 与Einstein几乎一人完全建立了广义相对论的理论架构不同，量子力学是在许多物理学家的共同努力下发展起来的，其过程中有许多摸索和争论。
- 例如，在量子力学中对物质运动采用了类似热力学中的概率解释。
- 虽然Einstein本人对光电效应的解释使他成为量子理论的创始人之一，他也对Brown运动做过重要研究，他对这种解释持怀疑态度。

Einstein与量子理论

- 传说他对玻尔说：“难道你们真的相信上帝也靠掷骰子办事吗？”玻尔回敬道：“我们不能教导上帝该怎么做！”
- Einstein当年对量子力学的一些质疑成了现在量子信息学的出发点，在这个领域近年来有一些实验，如潘建伟参与的一些实验。
- 这里提到这些是为了强调以下数学和物理的不同：实验是检验物理理论的最终标准。我们也会看到没有理论的先行讨论，有些实验也无从做起。

量子力学与泛函分析

- 电子绕着原子核旋转的模型有很大的困难：由Maxwell的理论，电子在旋转过程中会发出电磁辐射而损失能量，最终落到原子核上。
- 这种辐射的光谱也应该是连续的，可实际观测的光谱是离散的。
- 量子力学中的一个解释由有名的薛定谔方程给出：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi$$

此处 H 为一二阶微分算子。

量子力学与泛函分析

- 这时可以使用偏微分方程或泛函分析的理论： H 的谱是离散的，对应着电子运动的能级，能级之间的差别对应着辐射的光谱。
- 量子力学促进了泛函分析的发展：Von Neumann等人参与了量子力学与泛函分析的研究。

量子力学与群论

- 量子力学中自旋与角动量的研究建立了与数学中群论和表示论之间的联系。
- 数学家Weyl, Van Der Waerden都写过群论与量子力学方面的书。
- 数学家Harish-Chandra原来是学物理的，由于对群论和表示论感兴趣，转成搞数学的。

Dirac方程

- 从狭义相对论的质量能量关系可以导出Klein-Gordon方程。这是一个二阶片微分方程。
- 由于Schrödinger方程中对时间的导数是一阶的，Dirac（狄拉克）考虑了所谓Klein-Gordon方程的“平方根”，即有名的Dirac方程。
- 这个方程的预言之一是正电子的存在，由于当时还没有观测到正电子，Dirac遭到很多的嘲笑，比如来自Heisenberg。

Dirac方程与指标理论

- Dirac的想法在数学上也是出乎意料的，在指标理论中起关键作用。**Aityah**和**Singer**发展的指标理论的第一步就是要在一般的流形上构造**Dirac**算子。
- 指标定理起源于**Riemann-Roch**公式和**Gauss-Bonnet**公式，在陈类和配边理论的基础上，**Hirzebruch**证明了高维的**Riemann-Roch**公式和符号差公式（吴文俊先生在这方面也有工作）。
- **Hirzebruch**的工作引发了**Grothendieck**在这方面的的工作，最终导致了**Aityah**和**Singer**发展的指标理论，其第一步就是要在一般的流形上构造**Dirac**算子。

Feynman积分

- 从经典力学到量子力学有两种方案：从Hamilton力学出发，用正则量子化的方法可以得到Schrödinger方程；从Lagrange力学出发，可以导致Feynman积分。
- Feynman的方法起源于Dirac书中一个小的remark，其基本对象是考虑路径空间上的积分。
- 这类积分数学上一般没有严格定义(虽然有Wiener测度的理论)，但物理学家发展出一些方法，可以做出有物理意义的预言。

Feynman积分

- Feynman积分在物理中被广泛应用，物理学家用它可以得到数学上意想不到的结果，所以被数学家认为是物理学家的神奇法宝。
- 数学家所做的往往是用数学方法证明物理学家的一些猜想，而不能完全了解物理学家达到这些猜想的思路。

现代理论物理和数学

- 我所说的现代理论物理包括以Yang-Mills规范场论为基础的量子场论、以广义相对论为基础的量子引力理论和以统一这两者为终极目标的超弦理论。
- 它们的共同特点是运用了越来越多的现代数学：微分几何、代数几何、拓扑学、表示论等等。
- 它们中许多研究也越来越多的表现为数学物理，而不被理解为理论物理。

现代理论物理和数学

- 很重要的是，由于数学物理跨学科的使用数学它们的研究促进了数学本身的发展。
- 例如，对规范场论的研究导致了Donaldson理论、Seiberg-Witten理论的出现，它们提供了传统的微分拓扑所不能提供的全新的方法。
- 2 维量子引力的研究导致了代数几何中Riemann面的模空间的Witten猜想的出现和Kontsevich 的证明。

超弦理论

- 超弦理论似乎也为数学的统一起着很大作用。
- 它促成了vertex operator algebra, Gromov-Witten theory and mirror symmetry等等的产生。
- 由于丘成桐先生证明Calabi猜想而出现的Calabi-Yau流形在超弦理论研究中起核心作用。
- 超弦理论中对偶性的思想导致了很多人惊奇的猜想，有些已经被数学家证明了。

- 由于时间关系不能做更详细的介绍。
- 可以参考李淼的书《超弦理论演义》和我的文章：“Derivatives in Mathematics and Physics”。
- Brian Green的书《宇宙的琴弦》（The Elegant Universe）。

结语

”何期自性，本自清静；

何期自性，本不生灭；

何期自性，本自具足；

何期自性，本无动摇；

何期自性，能生万法。”

—《六祖大师法宝坛经》