关于闭黎曼流形上 Gauss-Bonnet 公式的一个简单的内蕴证明 *

陈省身

介 绍

C. B. Allendoerfer[1] 与 W.Fenchel[2] 已经分别独立地把经典的 Gauss-Bonnet 公式推广到能够嵌入欧氏空间的可定向闭黎曼流形上去了。最近， Allendoerfer 与 André Weil[3] 把这个公式扩展到闭黎曼多面体上，并且特别地证明了一般闭黎曼流形的情形。在他们的证明中仍然用到了一个黎曼胞腔到欧氏空间的嵌入。这篇文章的目标是利用微分流形上的向量场理论，给出 Gauss-Bonnet 公式的一个直接的内蕴证明。

我们将要给出的证明的根本思想是很简单的，所以给出一个简短的概要也许是有益的。令 R^n 是一个偶数维的 n 维可定向闭黎曼流形。根据下面将要给出的细节，我们定义 R^n 上的一个 n 次内蕴外微分形式 Ω ，其当然等于 R^n 的一个数量不变量与体积元的乘积。我们所讨论的 Gauss-Bonnet 公式断言这个微分形式在 R^n 上的积分等于 R^n 的 Euler-Poincaré 示性数 χ 。为了证明这个结论，我们从流形 R^n 过渡到由 R^n 上的单位向量构成的 $2n-1$ 维流形 M^{2n-1}[4] 。在 M^{2n-1} 中我们证明 Ω 等于一个 $n-1$ 次微分形式 Π 的外微分。通过定义 R^n 上的具有孤立奇点的连续单位向量场，我们得到，把它看作 M^{2n-1} 中的像，一个 n 维子流形 V^n ，并且 Ω 在 R^n 上的积分等于在 V^n 上的相同积分。应用 Stokes 定理可见后者等于 Π 在 V^n 的边界上的积分。现在， V^n 的边界恰好对应于定义在 R^n 上的向量场的奇点，它们的指标之和，由一个熟知的定理，等于 χ 。在这样的解释下，可以求出 Π 在 V^n 的边界上的积分，并且很容易证明就等于 χ 。

这种方法当然也可以用来推导其它同样类型的公式，并且做合适的修改后，可以得出黎曼多面体上的 Gauss-Bonnet 公式。我们发表这个证明，因为在当前情形下，我们方法的主要思想是最清楚的。更多的结论将在一篇即将发表的文章中给出。

参考文献

[1] Allendoerfer, C. B., *The Euler number of a Riemann manifold.* Amer. J. Math., 62 (1940), 243–248.

[2] Fenchel, W., *On total curvatures of Riemannian manifolds I.* Jour. London Math. Soc., 15 (1940), 15–22.

[3] Allendoerfer, C. B., and André Weil, *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra.* Trans. Amer. Math. Soc., 53 (1943), 101–129.

---

* 原文 A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. 发表在 Annals of Mathematics, 45 (1944), 747–752.

[4] For its definition and topology see, for instance, E. Stiefel, *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.* Comm. Math. Helv., 8 (1936), 3–51.

沉痛悼念伟大的数学家，浙江大学数学科学中心名誉主任陈省身先生
`http://www.cms.zju.edu.cn/frontindex.asp`