Hermitian 流形的示性类 *

陈省身

介 绍

近年来，Stiefel[1], Whitney[2], Pontrjagin[3], Steenrod[4], Feldbau[5], Ehresmann[6] 等人的工作，通过引入所谓纤维丛的概念，大大增进了我们对于具有微分结构的流形的拓扑的了解。如此引入的流形上的拓扑不变量，称为示性上同调类，在某种程度上，至少在黎曼流形的情形，可以容许局部几何方法的刻画 [7] 。在这些刻画中， Allendoerfer-Weil[8] 的广义 Gauss-Bonnet 公式也许是最突出的例子。

在上面引用的工作中，特别强调了球面丛，因为它们是从具有微分结构的流形自然生成的纤维丛。同样重要的还有具有复解析结构的流形，它们在多复变解析函数论和代数几何中扮演了重要的角色。本篇文章中将研究复流形的复切向量构成的纤维丛，以及它们在 Pontrjagin 意义下的示性类。我们将证明存在某些基本类，使得所有其它的示性类可以通过对它们做上同调环的运算得到。然后我们将指出这些基本类可以等同于 Stiefel-Whitney 示性类在复向量情形的推广。在 de Rham 意义下，这些上同调类可以用（实）流形上处处正则的恰当外微分形式来表示。接着我们证明，当流形具有 Hermitian 度量时，这些微分形式可以从度量很简单的构造出来。这就意味着示性类完全由 Hermitian 度量的局部结构所决定。这个结果也包括了 Allendoerfer-Weil 公式，可以看作是它的推广。

关于复流形的示性类和复流形上定义的 Hermitian 度量之间的关系，这个问题由上面的结果已经完全解决了。我们指出，对应的黎曼流形的问题还未解决。大致来说，实数情形的困难在于某些实流形的有限同伦群的存在性，即有限维向量空间的线性无关向量的有序集合构成的流形。

这篇论文分为五章。在第一章中，我们考虑复球面丛，包括了复流形的复切向量丛。对一个给定的底空间，可以通过从底空间到 Grassmann 流形的一个连续映射来定义一个复球面丛，并且可以证明这是生成复球面丛的最一般的途径。我们取一个足够高维数的复向量空间的 Grassmann 流形，定义底空间的示性上同调类为 Grassmann 流形的上同调类的逆像。这样我们就需要研究复 Grassmann 流形的余闭链和闭链，这个问题已经由 Ehresmann 作了彻底的研究 [9] 。在第二章中对于 Ehresmann 的结果作了详细的探讨，特别是关系到我们目前工作的部分。其实，我们只对 Grassmann 流形中维数不大于底空间维数的余闭链感兴趣。如果 Grassmann 流形是 $n+N$ 维复线性空间中的 n 维复线性空间，那么就有 n 个基本余闭链，使得所有其它的维数 $\leq 2n$ 的余闭链可以通过对它们做上同调环运算得到。对应于这些余闭链的闭链就可以相应确定，并给出了几何解释。在第三章中，我们把这些余闭链在底空间中的像和把 Stiefel-Whitney 不变量推广到复向量所得到的余闭链等同起来。给出了关于这些余闭链的新定义，在整体微分几何中有重要应用。第四

* 原文 Characteristic classes of Hermitian manifolds. 发表在 Annals of Mathematics, 47 (1946), 85–121.

章研究具有 Hermitian 度量的复流形。我们证明了问题中提到的 n 个基本类可以用 Hermitian 度量构造的微分形式来简单的加以刻画。这些结果在第五章中被用来研究具有椭圆 Hermitian 度量的复射影空间。经典的 Cartan 公式 [10] 和 Wirtinger 公式 [11] 可以作为我们公式的特例而得到。

参考文献

[1] Stiefel, E., *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.* Comm. Math. Helv., 8 (1936), 3–51.

[2] Whitney, H., *Topological properties of differentiable manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 43 (1937), pp. 785–805.
Whitney, H., *On the topology of differentiable manifolds.* Lectures in Topology, pp. 101–141, Michigan 1941.

[3] Pontrjagin, L., *Characteristic cycles on manifolds.* C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.), Vol. 35 (1942), pp. 34–37.
Pontrjagin, L., *On some topologic invariants of Riemannian manifolds.* C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.), Vol. 43 (1944), pp. 91–94.

[4] Steenrod, N., *Topological methods for the construction of tensor functions.* Annals of Math., Vol. 43 (1942), pp. 116–131.
Steenrod, N., *The classification of sphere bundles.* Annals of Math., Vol. 45 (1944), pp. 294–311.

[5] Feldbau, J., *Sur la classification des espaces fibrés* C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 208 (1939), pp. 1621–1623.

[6] Ehresmann, C., Various notes on fibre spaces in C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 213 (1941), pp. 762–764; Vol. 214 (1942), pp. 144–147; Vol.216 (1943), pp. 628–630.

[7] Chern, S., *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds.* Annals of Math., Vol. 45 (1944), pp. 747–752.
Chern, S., *Integral formulas for the characteristic classes of sphere bundles.* Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 30 (1944), pp. 269–273.
Chern, S., *Some new viewpoints in differential geometry in the large.* Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 52 (1946), pp. 1–30.

[8] Allendoerfer, C. B., and Weil, A., *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra.* Trans. Amer. Math. Soc., 53 (1943), 101–129.

[9] Ehresmann, C., *Sur la topologie de certains espaces homogènes.* Annals of Math., Vol. 35 (1934), pp. 396–443.

[10] Cartan, E., *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos dt les propriétés topologiques de ces espaces.* Annales Soc. pol. Math., Tome 8 (1929), pp. 181–225.

[11] Wirtinger, W., *Eine Determinantenidentität und ihre Anwendund auf analytische Gebilde in Euklidischer und Hermitischer Massbestimmung.* Monatshefte Für Math. u. Physic, Vol. 44 (1936), pp. 343–365.

沉痛悼念伟大的数学家，浙江大学数学科学中心名誉主任陈省身先生
`http://www.cms.zju.edu.cn/frontindex.asp`