几何与分析回顾 *

丘成桐

在本文中，我们将讨论几何学与相关学科中作者认为比较重要的问题。

自从古希腊数学家的时代开始，几何学就被认为是科学的中心。科学家总是无法抗拒用几何学的语言去解释自然现象。确实，我们完全有理由把几何对象看作自然界的一部分。事实上几何学中几乎所有美妙的定理都在经典的或现代的物理学中找到了应用。为了更好的理解几何学的未来，我们也许有必要回顾一下已知的结论。当然，我所认为重要的问题也许在他人看来并非如此。同样的，我们也应该牢记，现在热门的问题也许今后并非如此。

一套理论只有当它的结论能够帮助我们更好的理解几何学的基本结构和内在美感的时候，才能被认为是成功的。

虽然我们要把这个学科分成几个门类来讨论，但是这种分类其实是人为的，因为每个分支的发展都强烈的依赖于其他的分支。

I. 子流形. 经典几何学中的许多非常重要的问题现在仍然没有解决。描述三维欧氏空间中的曲面已经成为计算机图形学与数据压缩中的重要命题。同时它们也在现代电影制片中起着重要的作用。

其实，三维空间中的曲面理论是几何学的中心论题。许多困难的问题至今仍没有解决。从高斯的时代开始，几何学家就对曲面的内蕴度量结构与它们在外围空间中的外蕴几何性质之间的关系抱有浓厚的兴趣。

A. 曲面的等距嵌入. 一个熟知的问题是刻划曲面上所有可以实现为到三维空间中嵌入的内蕴度量。Minkowski 在这个问题上作了第一个重要的进展，证明了任何凸多面体都是可以实现的 [152] 。对具有正曲率的光滑曲面，由于 Weyl 做出了第一个重要的估计 [221] ，所以这个问题被称为 Weyl 问题。 H. Lewy 在实解析范畴下解决了这个问题 [124] ， Pogorelov[169] 和 Nirenberg[162] 解决了光滑的情形。最近的可以参看李岩岩和管鹏飞的工作 [85] 。

Weyl 问题能够解决的一个重要的原因是它的解必定是唯一的，这是 Cohn-Vossen 和 Pogorelov 的一个定理。这里的唯一性是指，曲面的任何等距嵌入都相差一个三维空间中的刚体运动。这样的整体刚性对非凸曲面而言，如何找出好的定理是困难的。 A.D. Alexandrov 研究了下一个最简单的情形，即曲面曲率的正部的积分等于 4π[1] 。他只对实解析度量证明了刚性。Nirenberg 做了一个非常漂亮的尝试来证明光滑的情形 [163] 。我们只要证明曲面上至多存在一条闭的渐近曲线，就可以套用 Nirenberg 的论证。理解曲面上的渐近曲线仍然是一个显著的问题。它们在负曲率曲面的整体等距嵌入问题中具有基本的重要性，因为它们是等距嵌入问题的特征曲线。负曲率曲面的等距嵌入问题是一个非常有趣的双曲问题。同样

* 原文 Reviews of Geometry and Analysis 发表于 Asian J. Math. Vol. 4, No. 1, pp. 235-278, March 2000

地，证明对这类曲面的整体存在性定理是非常困难的。其实，著名的 Hilbert-Efimov 定理说，一个具有强负曲率的完备曲面不能等距嵌入到三维欧氏空间中 [55] 。

一个重要的存在性定理是由洪家兴证明的 [98] ，他假设了曲率按合适的方式衰减。一个很有挑战性的问题是，给出 Efimov 定理的一个量化的证明。也就是说，取一个半径为 r 的测地球，其上的曲率 ≤ -1 并且在圆心曲率等于 -1 。问使得它可以嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 并且第二基本形式小于一个给定常数的最大的 r 值。

整体刚性对一般的紧致曲面不成立，不论度量是否是实解析的。然而，经典几何学中的一个显著的问题是，是否存在 $\mathbb{R}^3$ 中紧曲面的一个非刚体运动的连续族的等距嵌入。

R. Connelly[50] 和 D.Bleecker[15] 对多面体给出了这个刚性猜想的漂亮的反例。他们的方法似乎不能改进来给出光滑情形的反例。闭曲面的等距运动存在外蕴的不变量。很可能只有有限多个这样的不变量，使得等距运动的空间是有限维的。Bleecker 的例子表明这种曲面所包围的体积不是一个不变量。我们应该能够把这些多面体的例子推广到分段光滑的情形，并且了解这种运动是否是边界的运动造成的。

同样， Cohn-Vossen 发展了闭曲面的无穷小刚性理论 [47] 。其中的方程是线性的，所以更容易处理。但是只有当曲率为正时才是椭圆型的。所以对曲率变号的曲面来说，了解这个方程会很困难。

我们知道，对某些闭曲面存在非平凡的一阶等距形变。现在的问题是，怎样刻划这些曲面。这些是关于整体曲面上的混合型方程的自然的唯一性问题。

当然，我们也可以对开曲面问上面的问题。 Cartan 证明了每个实解析曲面可以局部等距嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中 [35] 。同样的问题在光滑度量时要困难得多。林长寿的一个重要的定理说，具有非负曲率的光滑曲面可以局部等距嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中 [140] 。他也解决了曲率的梯度不为零的情形 [141] 。一个公开的问题是说，是否这个假设可以去掉。这个问题最近由 Nadirashvili 找到了反例。

对带边紧曲面的等距嵌入的边值问题，我们可以有两种不同的表达方法。一种是 Neumann 问题，要求边界的平均曲率等于一个给定的函数 H 。（我们要求 $H^2 \geq K$. ）当然，我们也可以要求边界曲线的像是某个曲面的子集。另一种是 Dirichlet 问题，要求边界的像是一条给定的 Jordan 曲线。在第一个问题中，如果曲率为正，平均曲率可以是有界的，并且能够保证正则性。后一个问题中，给定曲线的一个重要的必要条件是它的第二基本形式的长度必须控制原来边界的测地曲率。洪家兴已经对这个问题做出了重要的进展 [97] 。

对 $\mathbb{R}^3$ 中的无边的闭曲面，它们的内蕴曲率存在许多约束。第一个重要的约束是，曲率在某一点必须为正，并且 $\int_\Sigma K^+ \geq 4\pi$ ， 其中 $K^+ = \max(K, 0)$ 。

Nirenberg[163] 证明如果 $\int_\Sigma K^+ = 4\pi$, 那么集合 $\{K < 0\}$ 的每个分支都包含在两条闭的平面曲线所围的区域中。这个事实给出了可以等距浸入 $\mathbb{R}^3$ 的度量的一个约束。集合 $\{K > 0\}$ 和 $\{K < 0\}$ 的拓扑是否存在一般的约束？

如果 Σ 是嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的，则它的内部是区域 Ω 。把 Σ 的谱和 Ω 的谱建立联系应该会很有趣。一个简单的论证表明 Ω 的体积的上界是 $\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{Area}(\Sigma)\lambda_1^{-\frac{1}{2}}$ ，其中 λ_1 是 Σ 的第一特征值。从这个陈述以及 Korevaar[116] 的工作可以得出 $\frac{\mu_i(\Omega)^{3/2}}{\lambda_i(\Sigma)\sqrt{\lambda_1(\Sigma)}} \geq C_g > 0$ ，其中 $\mu_i(\Omega)$ 是 Ω 的第 i 个 Dirichlet 特征值，$\lambda_i(\Sigma)$ 是 Σ 的第 i 个特征值。这里 C_g 是一个只依赖于 Σ 的亏格的常数。什么是 C_g 的最佳值，以及是否存在一个曲面取到这个最佳值？是否集合 $\{\mu_i(\Omega)\}$ 决定了 $\{\lambda_i(\Sigma)\}$ 以及反过来？如果曲面 Σ

可以等距嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中，它的谱 $\{\lambda_i(\Sigma)\}$ 很可能是有约束的。那么约束条件是什么？我们知道 $\{\lambda_i(\Sigma)\}$ 的渐近行为是和 Σ 的测地流的动力学性质密切相关的。是否测地流的动力学性质有约束？既然 Σ 不能有处处非正的曲率，是否闭的嵌入曲面的测地流是非遍历的？如果它是非遍历的，是否可以用外蕴几何描述测地流的不变区域？什么是这个流的熵？是否可以用 $\mathbb{R}^3$ 的坐标描述这些测地线？

B. 几种不同的几何. 我们可以研究曲面在比正交群更大的群作用下保持不变的那些性质。比如作用在 $\mathbb{R}^3$ 上的特殊线性群，共形变换群和射影变换群。我们可以问曲面 Σ 在这些群作用下保持不变的性质。它们分别称为仿射，共形和射影几何。这些几何中有许多有趣的尚待解决的问题。

仿射几何中重要的不变量是仿射度量与仿射法线。当曲面的所有仿射法线都汇聚于一点时,称该曲面为仿射球面。这种曲面已经在 Calabi[23,24],Calabi-Nirenberg[26] 和 Cheng-Yau[39,40] 中做了广泛的研究。从这些工作,我们知道对任意的凸锥，有一个完备仿射球面和它渐近。如何有效的构造这样的仿射球面将会是非常有趣的。是否可以找到一个用伪全纯函数的表示 (参看 [218]) ？是否可以用闭形式写出这样的球面？（曲面 $xyz = 1$ 和坐标锥渐近。）多面体锥的情形是特别有趣的。我们是否可以计算这些情形下的仿射坐标？当然，我们可以对高维情形问同样的问题，这和线性优化问题有联系 [110] 。

到目前为止，大多数进展假定了曲面是凸的。当曲面具负曲率时会有什么结果？怎么样的仿射球面具有完备的负曲率的诱导度量？

由一个四阶的椭圆方程，可以定义仿射极大曲面的概念（参看 [25] ）。我们所以可以固定曲面的边界和沿着边界的法向。如果我们固定一个三角形的边界，那么是否有一个有效的方法来解这个仿射极大曲面的边值问题？如果我们固定 $\mathbb{R}^3$ 中的一个多面体，我们可以尝试构造一个通过多边形所有棱的 C^1- 曲面，并且该曲面在每一面都是仿射极大的。在所有这样的 C^1- 曲面中，我们可以试图找出一个具有极大全仿射面积的曲面。最近， Trudinger 与汪徐家 [214] 解决了仿射极大曲面的 Bernstein 问题。我们希望今后会有更多关于仿射极大曲面的估计的工作出现。

如同我们在 Cheng-Yau[40] 中所讨论的， $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的仿射球面的仿射度量在经过一个 Legendre 变换以后成为了 $\mathbb{R}^n$ 中一个凸区域的上的射影不变度量。所以把 $\mathbb{R}^n$ 中曲面的射影不变性质和 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的仿射球面的超曲面的仿射性质联系起来会是一个有趣的问题。

我们知道如果 $\mathbb{R}^3$ 中的一个闭曲面是无穷小（度量）刚性的，那么它在射影变换下的像也是无穷小刚性的。是否这个命题对闭曲面的整体刚性也是对的？是否可以在射影或仿射几何中提出同样的刚性问题？

关于 $\mathbb{CP}^3$ 中的复曲面有许多有意思的经典问题。我们也可以对 $\mathbb{R}^3$ 中曲面借助射影几何问同样的问题。比如，对一个和 $\mathbb{R}^3$ 中 n 面体锥渐近的仿射球面，其上的由 $\mathbb{R}^3$ 中有理函数切割出的闭曲线中哪些具有最小的次数？当然我们也可以尝试找出对这些曲线计数的办法。哪些仿射球面可以用代数多项式定义？对 $\mathbb{R}^3$ 中由代数多项式定义的闭曲面，是否可以对其上包含有同样由代数多项式定义的测地线的那些曲面进行分类？

$\mathbb{R}^3$ 中的代数曲面当然是重要的曲面。然而，我们对他们几乎一无所知。现在有一些关于他们的分支数目的信息。但是他们的几何肯定是特殊的。脐点的数目，闭测地线的数目，闭渐近线的数目，正曲率区域的拓扑，拉普拉斯算子的特征值，这些都是和定义曲面的多项式相关的有趣的不变量。例如，我们希望用这些曲面和直线相交的情形来估计它们的值。一方面，我们有从代数几何中得到的技巧和

信息。我们可以把曲面复化以得到它们的拓扑和相互间的关联信息。不幸的是，代数曲面复化并不唯一，如何处理复化是很有意义的问题。另一方面，我们希望用经典的方法来理解这些曲面的经典几何 - 偏微分方程和来自实射影几何的联系。在这两种方法间建立沟通将会是非常重要的。当我们复化这些曲面的时候，大多数时候，我们可以找到一个具有负的数量曲率的凯勒 - 爱因斯坦度量 [207] 。既然这个度量在反全纯对合下是不变的，我们就找到了曲面上的一个典则度量。（典则是指如果有一个代数双射对两个代数曲面和它的复化曲面是双射时，它会是这个典则度量的等距映射。）实代数簇上的一些定理可以用典则度量来加以证明。我们如何把这个典则度量和曲面上的诱导欧氏度量联系起来呢？

在复代数几何中，了解一个代数流形上的代数曲线是非常重要的。实代数曲面上的实代数曲线扮演了什么样的角色？这些曲线的拓扑与几何性质怎样？我们如何用定义曲线的多项式的次数来给出这些曲线的分支数目和测地曲率的上界。

很可能每个闭曲面都可以用次数足够大的实代数曲面来逼近。什么是逼近一个给定曲面的代数曲面的最小次数？换言之，给一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得和给定曲面的 Hausdorff 距离小于 $\varepsilon > 0$ 的代数曲面的最小次数是多少？是否可以用曲面的合适的可计算的几何量给出一个估计（比如曲面平均曲率和它的微分的 L^2 范数）？如果我们对次数小于一个给定整数的曲面的平均曲率的 L^2 范数取极小化，那么我们会得到什么样的代数曲面？

实代数曲面提供了很丰富的一类自然奇点。研究奇点附近的主曲率的行为是非常有意思的。拉普拉斯算子的特征函数在这些点附近的行为也会是很有趣的。

相反的，如果我们有代数 1- 形式定义了一个（可能奇异的）叶状结构，如何找出闭叶和这些叶的数目的上界将会很有趣。什么时候这些叶是代数的？

C. 极小曲面. 文献中研究的有几类重要的曲面。大多数是由变分方法得到的。

第一类主要的是极小曲面。这些曲面的平均曲率为零。当我们给定 $\mathbb{R}^3$ 中的一条闭曲线，我们寻找边界是这条给定曲线的曲面中面积最小的。我们可以限制这些曲面的拓扑是属于某些类型的。比如，我们可以考虑所有亏格是 g 的曲面。那么面积的极小值 A_g 是一个依赖于亏格的数。一般而言，$A_g \geq A_{g+1} \geq \cdots$ [149] 。当边界曲线是光滑的，Hardt-Simon 的一个著名定理说，对某个 g_0 ，$A_{g_0} = A_{g_0+1} = \cdots$ [90] 。现在还没有有效的方法估计 g_0 ，这将会是一个有挑战性的问题。

现在还不知道是否 $\mathbb{R}^3$ 中的一条光滑简单闭曲线可以成为无穷多个极小曲面的边界。（如果曲线是实解析的，这种情况不会发生（ Tomi[212] ）。）是否有一个一般的算法来找到所有以一条给定闭曲线（或一个闭曲线的集合）为边界的极小曲面？计算以给定曲线为边界的非稳定极小曲面仍然是一个困难的问题。（现在也没有很有效的方法来计算面积极小的曲面。）我们不知道以一族给定的光滑曲线为边界的稳定或非稳定极小曲面的亏格可以有多大。是否可以是任意大？

有关极小曲面的定量行为的许多基本问题现在还没有解决。一个熟知的问题是，等周不等式的最佳常数，即 $\frac{4\pi A}{L^2}$ 的最佳上界是多少，其中 A 是面积， L 是边界的长度。自然的我们会猜测它等于 1 。如果边界是一条约当曲线这是已知的（参看 Li-Schoen-Yau[132] ）。这个问题和极小曲面的 Sobolev 不等式的最佳常数有关。这个是 L^1 的情形。 L^p 的情形也同样有趣。

极小曲面的第一 Neumann 特征值的下界估计和第一 Dirichlet 特征值的上界估计是很有趣的问题。

虽然对于一条闭曲线的存在性问题已经解决了，多个边界分支的情形还所知甚少。同样，当边界是奇异的，只有非常少的结果。

给定 $\mathbb{R}^3$ 中一个同胚于 S^2 的单纯复形的一维骨架，我们可以极小化从 S^2 到 $\mathbb{R}^3$ 的通过这个一维骨架的映射的像的面积，其中像的面积的重数是 1 。其中会产生什么样的奇点？比如，对一个同胚于四面体骨架的一维集合来说，是否可以找到一个同胚于这个骨架上的锥的极小集合。

由于 Meeks,Hoffman,Jorge,Karcher,Rosenberg 和其他一些人的努力(参看 [58,96,148]), $\mathbb{R}^3$ 中完备逆紧极小曲面的拓扑分类已经接近完成。然而，现在还不清楚如何分类相配的共形结构以及和第二基本形式联系的二次微分（ 虽然在 Collin-Kusner-Meeks-Rosenberg 最近的工作里有了进展 [49] ）。除了分类问题，许多和这些曲面上的分析相关的问题还没有解决。

例如，我们可以问关于 $\mathbb{R}^3$ 中完备极小曲面上的调和函数的问题。如果调和函数是正的，是否它在曲面的每个末端渐近于一个常数？如果一个调和函数 U 有至多多项式增长，那么是否存在一个常数 α ，使得

$$0 < \overline{\lim}_{|x|\to\infty} \frac{U(x)}{|x|^\alpha} < \infty?$$

这样的 α 组成的集合是不是无穷的，是否渐近于一个整数？对每个 α ，这样的调和函数空间是有限维的。在一个合适的加权 Sobolev 范数下，所有多项式增长的调和函数空间应该张成所有多项式增长的函数空间。

一个完备逆紧嵌入的极小曲面上拉普拉斯算子的谱应该不会和 $\mathbb{R}^2$ 的情形相差太远。此外，我们希望知道如何描述连续谱和近似特征函数。

也许研究算子 $-\Delta + \|x\|^2$ 的谱是很有趣的，因为它是离散的。这应该与 $\|x\|^2$ 的临界点和连接这些临界点的经典道路有关。（经典道路是指那些相对于拉格朗日函数 $\int |\nabla u|^2 + \int \|x\|^2 u^2$ 临界的道路）。

用共轭极小曲面的构造方法，很容易构造极小曲面的非平凡连续族。然而，这族曲面中只有孤立的成员是嵌入的。一些经典的嵌入极小曲面的例子，如黎曼楼梯 (staircases) 和 Scherck 塔 (towers) ，的确构成曲面族。从这些曲面族得出的不变量可以用作更一般的常平均曲率曲面的模空间(参看 Grosse-Brauckmann,Kusner 和 Sullivan[83] 最近的关于裤子形状的常平均曲率曲面的分类)。 Kapouleas 的工作 [108,109] 已经成为 $\mathbb{R}^3$ 中极小曲面和常平均曲率曲面模空间理论的基本原理。

大多数完备逆紧浸入的极小曲面都是渐近平坦的。了解这些曲面上的测地流的动力学性质应该是非常有趣的：测地线何时从无穷远发出？它们是怎么散开的？

我们知道存在逆紧浸入到球中的完备极小曲面。这些曲面的几何性质怎样？它们能否是嵌入的？既然曲率一定趋于负无穷，找出这些曲面在末端的精确的渐近行为就非常重要。它们的谱是否是离散的？

D. 闭的极值曲面. $\mathbb{R}^3$ 中最简单的极值闭曲面是指面积取到极值，同时保持内部体积固定。这些曲面具有常平均曲率。 Wente 解决了如下的经典问题，证明了存在具有常平均曲率的浸入环面 [220] 。虽然有更多的例子被构造出来，具有常平均曲率曲面的分类还远未完成。

Wente 曲面上的曲率线都是平面曲线。了解自相交线的组合结构，曲面上正曲率区域的拓扑及其渐近线都会是有趣的问题。

另一类重要的曲面是相对于泛函 $\int H^2$ 取极值的曲面。 Leon Simon[189] 证明了取得整体极小值的环面的存在性，对高亏格曲面的存在性问题也取得了重要进展。计算这种曲面上 $\int H^2$ 的可能值毫无疑问是非常有趣的。这也将解决 Willmore 猜想，即环面上 $\int H^2$ 的整体极小值等于 $2\pi^2$[222] 。 Willmore 问题有一个分段线性

的版本（参看 Hsu-Kusner-Sullivan[101] ），但是甚至在这种情况下还不清楚如何保证极小化的存在性。

在一个三维流形上，我们可以将泛函 $\sqrt{A}(1-\frac{1}{16\pi}\int\|H\|^2)$ 极值化，其中 A 是曲面的面积。在相差一个正规化下，这个量被称为曲面的霍金质量 [92] 。

E. 曲面的运动. 曲面在 $\mathbb{R}^3$ 中有许多运动方式。我们已经提到了怎样描述曲面的保持内蕴度量的运动这个非常有趣的问题。什么是研究这些运动（模掉欧氏空间的运动）的好途径？如果我们移动曲面的边界，是否紧曲面的运动可以由有限多个参数所决定？如果曲面的曲率可以为负，这是一个困难的问题。

更一般的, 是曲面允许度量随着第二基本形式变化的运动. 也就是说如果 $X(t)$ 是一族曲面的嵌入，我们要求 $\frac{d}{dt}\langle dX(t), dX(t)\rangle$ 由 $X(t)$ 处的第二基本形式决定的一个对称张量所决定。我们期待这样一族曲面会有怎样的奇异行为呢？由于 Weyl 定理，这个问题在凸曲面情形是适定的。在这样一个运动下保持曲面凸性的条件是什么？

更多的熟知的曲面运动是把速度 $\frac{dX}{dt}$ 和曲面法矢的某个数量倍数相等起来。这个数量可以是曲率，平均曲率或平均曲率的逆加上一个合适的正负号。一套漂亮的理论已经由 Hamilton,Huisken 和其他人建立起来（参看 [87],[102] ）。对奇点的完全理解还没有完成（除了 Huisken 和 Sinestrari[104] 在正平均曲率曲面的工作）。在出现奇点后这个流会发生什么情况？

在这些曲面的运动过程中，观察基本的几何量的变化会是非常有意思的。其中包括第二基本形式，测地线，脐点和曲面的谱等等的行为。

自然运动中创造出的奇点也许是自然界中最普遍的奇点。或许对简单运动而言，有某个“奇点消解”定理可以帮助我们理解奇点是怎样发展的。考虑方程的“图”和奇点的一个典型的方法是通过投影或者与平面相交。是否可以推广这类构造来理解 3 维空间中曲面的运动？

除了用前面方法定义的运动外，还有 3 维空间中曲面的波运动。当我们观察水滴，表面波，和振动膜的时候，我们会看到漂亮的几何图画。我们应该如何期望去描述这些图画，虽然我们对支配它们形成的方程还了解得很少？

对振动膜而言，我们熟知波运动可以用膜的特征函数展开来很好的逼近。如何解释这种逼近？有两个方程和振动膜有关。一个是 $\frac{dX^2}{dt^2}=-HN$ ，其中 H 曲面的平均曲率， N 是曲面的法矢。我们也可以研究平坦 Minkowski 时空中的类时极小超曲面。在两种情形下，我们对超曲面的整体时间行为了解得很少。对线性波方程，有明显的具有时间周期的波。还不清楚这对上面的非线性方程意味着什么。

F. 欧氏空间中曲面的表示. Minkowski 给出了表示 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的第一个系统的方法。他成功的处理了凸多面体的情形 [152] 。一般而言， Minkowski 的纲领是通过将法矢平移到原点的方法把曲面 Σ 映射到球面 S^2 上（高斯映射）. 如果曲面 Σ 是严格凸的，高斯映射就是一一的。因此曲面的所有信息都可以通过高斯映射在 S^2 上表示出来。其中高斯曲率，特别的，可以写成 S^2 上的一个函数。著名的 Minkowski 问题是当我们知道 S^2 上的曲率，再生出曲面 Σ 。如果给定的曲率函数是光滑的，那么曲面 Σ 是光滑的。同时它在至多相差一个平移下也是唯一的。这些事实是由 Pogorelov[169] 和 Nirenberg[162] 证明的。

有几个重要的问题有待解决。我们如何用数值方法有效的解决 Minkowski 问题？当我们离散化球面时，很明显离散化要和曲率函数值的分布相适应。曲率函数值很大的地方，这些点的领域里应该包含更多的节点。什么是选择这些点的最佳

途径？在经典几何的许多应用中，我们需要在 Σ 上积分。是否可能通过 S^2 的离散化给出 Σ 的一个有效的离散化，使得任意光滑函数的积分可以用这些点处的函数值来最佳的表示出来。

当曲面是凸的，无边界时， Minkowski 问题已经作了很好的研究。可是要去掉凸性或无边界的假设都是困难的。

给定 $\mathbb{R}^3$ 中的一条闭曲线 τ 和一个定义在 S^2 上的正函数 K ，什么时候我们可以找到一个以 τ 为边界的凸曲面 Σ, 使得 Σ 的高斯曲率在 Σ 的高斯映射下等于 K 。对于 K 和 τ 有相当多的相容性条件。首先，τ 是某个凸曲面 $\bar{\Sigma}$ 的边界。其次，$\frac{1}{K}$ 在 D 上的积分大于以 τ 为边界的曲面面积的极小值。第三， 2π 和 D 的面积之差的绝对值不超过 τ 的第二基本形式长度的积分。了解是否这些是解带有 Dirichlet 边值的 Minkowski 问题的所有的相容性条件将会很有趣。当然可以在要求 $\partial\Sigma$ 在一个给定的闭曲面上的条件下提出类似的问题。

如果曲率允许改变符号，那么 Minkowski 问题甚至对闭曲面也是困难的。很明显曲面上曲率等于零的部分产生了分歧。也许从一开始就应该假定 K 是实解析的。高斯映射不再是一一的。结果， Minkowski 数据成了一个集值映射。一般的，曲率函数的值是一个带有阶数的有限集合。阶数是从 S^2 上的点所定义的支撑函数得到的。如果一切都是在适当定义的实解析的条件下，是否这个数据可以决定这个闭曲面？

一个可行的表示曲面的途径是把曲面沿着某些曲线 $\{\tau_i\}$ 的集合切割成许多小块。空间曲线 τ_i 可以用它们的曲率和挠率参数化。 τ_i 围成的小块可以用它们的 Minkowski 数据参数化。有时候，可以自然的选择由曲率或平均曲率的零点定义的曲线 τ_i 。

取 p 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个点。考虑所有通过 p 的直线。它们和一个给定的曲面相交，然后按几何光学原理反射。反射可以持续若干次。这样，我们就得到了从以 p 点为圆心的单位球面到曲面上的集合的一个集值映射。

这个映射通过拉回曲面的表面密度，给出了单位球面上的一个密度。对这个密度有何说法？它如何依赖于点 p 的选择？

当曲面是闭的且是凸的，同时 p 在曲面的内部时，我们应该能够回答这个问题。给定 S^2 上的一个密度，我们能否找到一个闭曲面实现之？

类似的，如果我们有一个和曲面不相交的平面，它接收到从 p 点发出经由曲面反射的光线。这样就得到了 L 上的一个密度。了解这个密度可以在多大程度上决定这张曲面是很有意思的。如果曲面是凸的，通过移动 p 或 L 的位置，应该能够得到这张曲面。如果曲面不是凸的，情况又是如何呢？

G. 三维流形中的极小曲面. 极小曲面和 $\int H^2$ 的极值曲面是三维流形中最自然的特殊曲面。对 S^3 中的这些曲面进行分类并非不切实际。估计这些曲面上的几何不变量也是非常有趣的。多年以前，作者猜测 S^3 中的嵌入极小曲面的第一特征值等于 2 。虽然这个问题仍未解决， Choi 和 Wang[43] 已经做出了进展。 S^n 中的极小超曲面的 zeta 函数是否有很好的表现？能否找到这些 zeta 函数的算术性质？这些是否和通常的泛函方程类似？拉普拉斯算子的行列式应该有特殊值。

考察 S^3 中是否存在非平凡连续族的闭极小曲面会很有意思。如果这样的族确实存在，那么对每个亏格，都有有限多个 S^3 中的极小曲面。如何对它们进行分类以及它们的面积是多少？

除了自身的美以外，研究 S^n 中的极小曲面与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中极小子流形的孤立奇点的研究有关系。 S^n 中的极小子流形上的锥是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个具有孤立奇点的极小子流形。所以 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小子流形和 S^n 中的极小子流形之间有密切的关系。 S^n

中极小曲面的特征函数和对应的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小子流形上的齐次调和函数有关。这个共同的次数 α 和 S^n 中的极小曲面的特征值有关。其实，特征值就是 $\alpha^2+k\alpha$，其中 k 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中子流形的维数。和这种对应相关的有一些自然的问题。 $\mathbb{R}^n$ 中极小子流形上的调和函数空间的维数的估计是 Peter Li[131] 和 Colding-Minicozzi[48] 给出的。特别的用曲面的面积给出了 S^n 极小子流形的特征值的重数。当极小子流形是线性的， α 是一个整数。这可以从调和函数的可去奇点定理得到。能否用极小曲面的面积给出 α 的一个合理的约束？当 α 很大时，它在一个误差下渐近于一个正整数。我们如何估计这个误差？当子流形是测地球面时，它的重数很可能很大。能否证明这个论断？

在 [133] 中， Peter Li 与作者引进了黎曼曲面上共形结构的共形面积的概念。这和黎曼曲面的特征值有密切的关系。一般来说，对闭黎曼曲面上的一个给定的共形结构，我们可以对每个共形度量赋一个数 $\lambda_i A$，其中 λ_i 是度量的第 i 个特征值， A 是面积。由 N. Korevaar[16] 的定理，这个数有一个上界，找到一个取到这个上界的极值度量将是非常有意思的。球面中的许多极小曲面给出这样的极值度量。能否给出一个精确的关系？

对 S^n 中的一个不包含在任何 S^{n-1} 中的闭极小曲面，这个曲面的第 cn 个特征值是否 ≥ 2，其中 c 只依赖于曲面的亏格？是否有可能估计 c？是否它和亏格无关？特别的， $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一张通过原点的超平面应该把这张曲面切割为至多 cn 个分支。这将保证 S^3 中的非平凡极小曲面被这样的超平面分成两个分支。

H. 高维空间中的子流形. 自从 John Nash 在流形 M^n 到 $\mathbb{R}^N$ 的等距嵌入的基本工作以来，对这种嵌入的理解只有很少的进展。 M^n 的余维数太高，以至无法讨论任何有意义的刚性问题。（很大的余维数是为了用拓扑方法帮助证明等距嵌入的存在性）为了使等距嵌入可见，应该找一类可以完全描述其形变的嵌入。如我们所知，流形 M^n 可以等距嵌入的最小维数是 $\frac{n(n+1)}{2}$。然而，对 $n\geq 3$，我们不知道任何有意义的关于 $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 中 M^n 的刚性或等距形变理论。（对 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 中的 M^n，有更多已知的刚性定理。）

对足够大的 N，我们可以在所有从给定流形 M^n 到 $\mathbb{R}^N$ 的等距嵌入中，极小化 $\int H^2$。什么是这个泛函的临界点？

一般来说，一个等距嵌入在 $\mathbb{R}^N$ 中的完备非紧流形 M^n 的平均曲率不是有界的。如果 Ricci 曲率有下界，那么很可能平均曲率是有界的。什么是使得流形具有有界平均曲率的等距嵌入的最优条件？从 Michael-Simon 定理 [151]，对这些流形满足一个等周不等式。

一个限制更大的问题是，把一个完备非紧流形嵌入到 R^N 中成为极小子流形。对曲面来说， Weierstrass 表示可以用来刻划这些度量。当维数大于 2，目前仅知的限制是度量是实解析的， Ricci 曲率是非正的，以及等周不等式和热核上的某些不等式 [38] 成立。（例如，热核在每一点的迹都不超过 $\frac{C_n}{t^{n/2}}$，其中 n 是极小子流形的维数。）可以在某个极小子流形上实现的全体度量构成的空间一定是一个瘦 (thin) 集。我们应该如何描述它？是否每个非紧流行同胚于一个欧氏空间中的完备极小子流形？是否每个紧流形同胚于一个球面中的极小子流形？当维数大于 3，只知道很少的关于极小子流形的具体例子。甚至极小图也还没有被分类。

极小图具有这样的性质，它是用极小子流形叶化欧氏空间得到的一片叶子。相反的，能否分类 $\mathbb{R}^n$ 的所有以极小子流形为叶子的叶状结构？这样的叶子一定是面积极小的。是否一个余维数为 1 的没有奇点的极小叶化必须是一个图？有许多具有某些奇点的极小叶化。例如，某片叶子可能是一个极小锥。分类具有孤立奇点

的余维数为 1 的极小叶化将会很有意思。

具有更高余维数的一类很丰富的极小子流形来自复子流形。实际上，有部分更高余维数的极小子流形都是这样构造的，不是把它们和复子簇联系起来，就是从带奇异点的极小子流形用扰动方法得出或是把问题通过作用在欧氏空间上的一个紧群降到更低的维数。对后面的方法，总是和计算一个奇异度量的测地线有关。这个奇异度量下的极小曲面值得研究。

欧氏空间中的极小子流形和球面中的极小子流形密切相关。球面 S^n 中的极小超曲面在 $n \geq 4$ 时很难构造。 S^n 中的非奇异极小超曲面族是否只有有限多个？目前还不知道 S^n 中是否有一个非平凡的非奇异嵌入极小超曲面族。如果这样的超曲面上的锥是稳定的，那么这个断言是对的。 Schoen[179] 注意到在这个情况下，极小超曲面容许一个正数量曲率的共形度量，这就给 S^n 中极小超曲面的几何与拓扑加上了很强的限制。我们应该能够分类这些超曲面。

S^n 中的极小超曲面的体积是重要的不变量。什么是可能值？作者猜想对嵌入极小超曲面，第一特征值等于 $n-1$ 。这个应该和子流形的体积估计非常有关系。从 Cheng-Li-yau[38] 的工作，我们可以构造极小子流形 M^k 的热核的迹的一个上界估计 $c_k\mathrm{Vol}(M^k)t^{-k/2}$ 。既然 S^n 的坐标函数给出了 M^k 的特征值为 k 的 $n+1$ 个特征函数，可以证明当 M^k 不是 S^n 的任何子球面的一个子集时， $\mathrm{Vol}(M^k)$ 有一个下界估计 $c_k^{-1}(\frac{2}{e})^{k/2}(n+1)$ 。

是否极小子流形 M^K 的体积的值的集合是离散的？存在一个具有同样体积的极小子流形的连续族。一个自然的例子是从 $\mathbb{CP}^n$ 或 $\mathbb{HP}^n$ 中的一个子流形上的连续族的 Hopf 纤维化的逆像得到。还不清楚是否在球面中存在一个连续族的偶数维极小子流形 $M^{2k}, k>1$ 。

明显的，处理柯西 - 黎曼方程是比较简单的，因为它们是一阶的椭圆方程组。对这个方程组， Atiyah-Singer 指标定理可以用来计算解空间的维数。不幸的是，极小子流形是由二阶椭圆型方程组定义的，很难理解它的形变理论。（给定一个极小子流形上的 Jacobi 场，我们能否找到沿着这个场的一族极小子流形的形变？）有可能存在一类面积极小的子流形，和某个一阶方程组密切相关。

为了找到这一类特殊流形，通常我们要求外围流形有特殊的和乐群。对凯勒流形（和乐群是 $U(n)$ ），这个想法追溯到 Wirtinger 不等式。这个想法就是找一个 L^∞ 范数点点为 1 的闭的 $k-$ 形式。那么任意的满足 $\omega|_M$ 为体积元的 k 维子流形 M 必定在它的同调类里体积极小。（从 Stokes 定理得出。）通常对具有特殊和乐群的流形，可以从和乐群构造出一些特殊的闭形式。这些形式其实是平行的，所以有常值的范数。当外围流形是欧氏空间时， Harvey 和 Lawson[91] 把对应的极小子流形称为校准的 (calibrated) 。现在构造这样的子流形仍然很困难，除了那些从复子簇产生的以外。一个重要的例子称为特殊拉格朗日子流形。凯勒流形 M^{2n} 的一个子流形 L^n 称为是特殊拉格朗日的，如果凯勒形式限制到 L 上是平凡的。如果 M^{2n} 的和乐群是 $SU(n)$（卡拉比 - 丘成桐流形），那么有一个全纯 $n-$ 形式 Ω 。我们可以要求在 L 上 $\mathrm{Im}(\Omega)=0$ 并且 $\mathrm{Re}\Omega$ 是 L 的体积元。这样的子流形被 Havey-Lawson 称作特殊拉格朗日流形。它们在弦论中被独立的重新发现出来，这是几年前 Becker-Becker-Strominger 的工作 [10] 。他们是想要找到卡拉比 - 丘成桐 3 维流形中的超对称链 (cycle) ，即那些保持一半超对称的 3 维链。

特殊拉格朗日子流形的形变理论是由 Mclean 研究的，他证明了这些子流形的 Jacobi 场可以和调和 1- 形式等同起来。这个碰巧分类了 L 上的平坦 $U(1)$ 联络。在 Strominger-Yau-Zaslow[195] 的文章中，我们研究了由 L 和 L 上的一个 $U(1)$ 联络一

对组成的模空间。这个模空间有一个自然的复结构和一个很好的“半平坦”的 L^2 度量。这个模空间的复维数是 $b_1(L)$ 。

当 L 是一个 3 维的环面，模空间就是复 3 维的并且有一个全纯 3- 形式。基于物理学家的推理，我们猜想这个复流形其实是另一个卡拉比 - 丘成桐流形，和原始流形构成镜像。特别的，这两个复流形的 Hodge 图表是互为对偶的，并且有理曲线条数的计算可以从它的镜像的周期推出。

基于对镜像的解释，我们可以对“量子”单值群做更进一步的猜测。例如，我们猜测上面提到的半平坦度量可以通过边界在特殊拉格朗日环面上全纯圆盘修正到一个非奇异的 Ricci 平坦度量。 Hitchin[94],Gross-Wilson[82],Gross[80,81],Barannikov-Kontsevich[8], 和 Fukaya-Oh[59] 在这个猜测上做出了进展。

我们希望在其他具有特殊和乐群（比如 G_2 或 Spin(7) ）的流形上也可以做类似的构造，这个反过来会让弦论学家很感兴趣。

不幸的是，还没有太多的构造特殊拉格朗日流形的办法。他们可以通过研究反全纯对合的不动点集或复的拉格朗日子流形来得到。同样， Schoen 和 Wolfson[181] 已经发展了基于特殊拉格朗日子流形体积极小化性质的一条途径。找到一个类似于扭子 (twistor) 理论的方法来构造这些面积极小的子流形会是很漂亮的。

给定紧流形上的一个丛，使得丛与流形都具有特殊和乐群，我们可以用和乐群的结构来要求丛上的一个联络的曲率是特殊的。（例如，如果这个丛是全纯的，具有平凡第一陈类，以及联络是埃尔米特的，我们可以要求曲率的迹等于零。）这些特殊联络的一个序列不一定收敛；它可能沿着某些极小子簇爆破 (blow up) 。一般而言，这可能是开子簇的一个不可数并集。在 Hermitian-Yang-Mills 的情形，爆破集可能是一个整体全纯子簇。这个程序可能给出用丛理论构造极小子簇的一个办法。

另一类极小子流形的例子是球面中的等参子流形。它们是通过满足一个过定方程组的函数集合定义的。如果余维数是 1 ，他们的主曲率是常数并且它们提供了一类重要的常数量曲率极小超曲面。对余维数大于 1 ，一个定义要求法丛是（几何）平坦的并且主曲率是常数。所有紧对称空间可以这样实现。

II. 内蕴几何. 一个让人着迷的事实是，定义在流形的切丛上的非退化二次形可以给出流形的众多整体信息。到目前为止，关于正定二次形或洛仑兹二次形的主要结果都是来自直接的几何直观或时空物理学。当二次形不是以上两种情形时几乎毫无结果。在一个复流形上，发展一些全纯二次形的理论也许是很有趣的。这些理论都没有获得很大的成功，部分的是因为我们还不了解和他们相关的不变微分算子。拉普拉斯算子和波算子有更成熟的历史。确实，我们了解正定度量要好过洛仑兹度量，部分是因为拉普拉斯算子理论已经发展了一整个世纪，而波方程理论在解的精确定量行为方面只有很少进展。

当我们讨论这些二次形时，第一个重要的问题是构造出在容许坐标变换下行为良好的量。（有时候流形有一个特殊结构只允许某种类型的坐标变换。）除非我们是在比较两个不同的结构，对度量做一次微分不能提供一个不变量。最重要的不变量出现在当我们对度量作两次微分时。二次导数在坐标变换下不变的部分构成了曲率张量。曲率给出的局部信息可以在很大程度上决定流形的全局结构，至少如果我们自然的假定每条测地线都可以无限延伸。是否这个假设可以被减弱一些？例如，如果我们只假设在所有点，导致不完备测地线的单位切向量集合是一个零测度的闭集，（或者是一个给定维数的子簇），是否我们可以实现大部分的全局定理？也许我们可以加上流形沿着每条不完备测地线的曲率都是有界的这个假

设，并且问这个度量空间的完备化的结构？

A. 全曲率张量的约束. 全曲率张量比度量张量有更多的成分。所以对于全曲率向量上的假定是一个过定条件。但是，还是可以问许多几何直观的问题。

一个自从 Rauch[170],Klingenberg[113], 和 Berger[12] 的时代以来的就非常热门的研究问题是有关正曲率流形的结构。 Toponogov 比较定理 [213] 是这个领域里的重要工具。下面的基本问题还没有回答：当维数足够大时，拓扑意义下是否存在具有正曲率的非局部对称流形。

在低维时，双重陪集空间的构造给出了许多非局部等距的例子。它们一般是从同调群的扭元素发现的。了解是否这些流形的实同调群和局部对称的流形一样将会很有趣。特别的，一个有趣的问题是是否 Betti 数的总和被同样维数的环面所控制。 Gromov 确实给出了一个只依赖于维数的上界 [76] 。

我们熟知在非负曲率和正曲率度量之间有非常微妙的差别。著名的 Hopf 问题问是否 $S^2 \times S^2$ 容许一个正曲率度量。也许我们应该问一个更一般的现象。如果一个流形 M 容许一个环面 T^k 在其上的局部自由的作用，是否任何非负曲率的度量必须容许一个点 p ，使得截曲率在所有切空间的二平面组成的 Grassmann 流形 $G(2, T_p(M))$ 的一个子集 K 上等于零，其中 $\dim(K) \geq \dim(G(2, \mathbb{R}^k))$ ？

一个相关的问题是 Gromoll-Meyer 试图在怪球面上构造正曲率度量的工作 [75] 。它们构造了非负曲率的度量，其中截曲率在一个瘦集上等于零。

D. Moore 和 M. Micallef[150] 注意到 Sacks-Uhlenbeck[177] 的著名定理可以用来研究具有正的各向同性曲率（这是说各向同性平面的截曲率为正）的单连通流形的同伦群。特别的，这就可以推出 Klingenberg 的著名的拼挤定理 [113] ，这个定理又依赖于三角形比较定理。一个有趣的问题是，从变分的论证中可以获得多少信息，包括可能使用向量丛。

我们还不知道一个具有正曲率算子的流形是否是一个球面，这是很令人尴尬的。 Hamilton 用他的 Ricci 流的理论分类了具有正的各向同性曲率的四维流形，并且证明了具有正曲率算子的四维流形是一个球面 [88] 。

给定一个定义在流形的切丛的二维平面的 Grassmann 流形上的函数，什么时候它成为某个黎曼度量的曲率函数？

B. Ricci 张量. 取曲率张量的迹就得到 Ricci 张量。它和度量张量有相同的类型。它也从数量曲率的第一变分得到. 这个非凡的事实用来给了广义相对论一个变分的处理方法。著名的爱因斯坦方程是从 Ricci 张量出发，构造一个等于物质张量的无散度的张量。已经有人试图推广全数量曲率的变分到曲率张量的 L^2 范数的变分。得到的方程阶数更高，从几何上更难理解。不过它确实推广了爱因斯坦方程，很可能最后会发展成为一套丰富的理论。

当 Ricci 张量是度量张量的常数倍，这个流形就被称为爱因斯坦流形。这也许是几何学中最自然和最美妙的一类流形。几何学中最基本的问题是决定哪些流形可以容许爱因斯坦度量。如果它们存在，又有多少？这些是有意义并且困难的问题。

当流形的维数大于 5 时，不知道任何存在性的阻碍。也许每个这些维数的流形都存在一个爱因斯坦度量。很难断定是否，对一个给定的紧流形，所有爱因斯坦度量的模空间有无穷多个连通分支。爱因斯坦度量的连续族存在，已知的例子与具有特殊和乐群的度量有关。最著名的是来自凯勒 - 爱因斯坦度量。

当维数不大于 4 时，爱因斯坦流形更具刚性。要求例如（参看 Hitchin[93] ） $\chi(M) \geq \frac{3}{2}|\tau(M)|$ ，其中 $\chi(M)$ 和 $\tau(M)$ 分别是流形的欧拉数和指标。也许存在这

样一般性的结构定理，每个四维流形都是通过连接 (1) 爱因斯坦流形， (2) 曲面上的曲面丛（也许有类似 Seifert 纤维化的可控制的奇点），和 (3) 三维流形上的圆周丛，都是沿着球面或环面上的圆周丛连接而成。这个可以看作 Thurston 纲领在 4 维情形的推广。

我们希望在三维和四维情形， Hamilton 的方程可以用来证明 Thurston 的双曲化猜想和上面的推广（参看 [89] ）。关键的问题是理解 Hamilton 方程的解发展时奇点的相应变化。

爱因斯坦方程的解的构造是一个困难的任务。物理学家首先用了对称（群作用）的方法来降低维数。这已经成了一个非常重要的工具。不幸的是，大多数这些解都是局部的并且有奇点。当度量是正定的， Mckenzie Wang,Ziller 等人已经作了系统的研究，并且找到了许多重要的爱因斯坦流形（参看 [219] ）。最近 Böhm 发现了 5 到 9 维的球面上的非齐性爱因斯坦度量的例子。

对于具有轴向对称的四维满足爱因斯坦场方程的洛仑兹度量， Geroch[67] 引入了 Bäcklund 变换，把一个解变到另一个解。这些变换是极度不平凡的。不幸的是大多数理论都是局部的。我们非常希望了解从这些变换构造的度量哪些是完备的。研究 Bäcklund 变换在正定度量下如何操作也是非常有意思的。

其实，在 70 年代，霍金和其他人 [68] 提议了一条途径（称为 Wick 旋转），把洛伦兹真空解解析延拓到正定的爱因斯坦度量。把一个爱因斯坦方程解的奇点用 Wick 变换进行修正，是非常了不起的。特别的， Schwarzschild 解变成了 $S^2 \times \mathbb{R}^2$ 上的一个漂亮的非奇异 Ricci 平坦度量。其上没有凯勒结构。不过 Wick 旋转不是一个良定义的过程，因为它依赖于局部坐标的一个巧妙选取。系统的研究 Wick 旋转对爱因斯坦方程的作用对物理学和几何学都是非常值得的。

Penrose 的扭子纲领和辛约化的思想在理解超凯勒的 Ricci 平坦度量上都是非常有效的 [95] 。这些方法，和度量的全局理解一样，都存在同样的问题。

到目前为止，构造爱因斯坦度量最有效的方法是基于凯勒几何。在这个几何中，度量是 $\sum g_{\alpha\overline{\beta}dz^\alpha \otimes d\overline{z}^\beta}$, Ricci 张量是 $R_{i\overline{j}} = -\frac{\partial^2 \mathrm{logdet}(g_{\alpha\overline{\beta}})}{\partial z^i \partial \overline{z}^j}$ 。

正是 Ricci 张量的简洁的表达式使 Calabi 确信构造凯勒几何中的爱因斯坦度量要简单的多。如果我们通过 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta}$ 形变一个给定度量 $\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}}$ ，其中 φ 是一个标量函数，那么爱因斯坦方程 $R_{\alpha\overline{\beta}} = c g_{\alpha\overline{\beta}}$ 可以写成

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \overline{z^j}} \mathrm{logdet}\left(\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}\right) \\
&= c\left[\overset{\circ}{g}_{i\overline{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right].
\end{aligned}
$$

如果有一个体积元 $V dz^1 \wedge \cdots dz^n \wedge d\overline{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^n$ 使得

$$
-\frac{\partial^2 \mathrm{log} V}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta} = c\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}},
$$

我们也可以把这个方程写成

$$
\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\left\{\log\left[\det\left(\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}\right) V^{-1}\right] + c\varphi\right\} = 0.
$$

在一个紧流形上，我们必定可以推出

$$\det\left(\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}\right)=Ae^{-c\varphi}V,$$

其中 A 是可以被 V 吸收的常数。体积元 V 的选择成了构造凯勒 - 爱因斯坦度量的非常重要的部分，特别对非紧流形而言 (参看 [41,207])。

从偏微分方程的观点看，明显的 $c<0$ 是如上方程的最简单的情形。在这个情形下， M 容许一个负常数曲率的凯勒 - 爱因斯坦度量的充要条件是流形 M 的典则线丛是丰富的 [6, 225] 。当 $c=0$ ，假设条件就成为存在一个体积元 V ，使得 $\frac{\partial^2\log V}{\partial z^i\partial\overline{z}^j}=0$ 。在这个情形下，每个凯勒类都容许一个唯一的 Ricci 曲率为零的凯勒 - 爱因斯坦度量 [225] 。 Ricci 曲率为零的的凯勒度量空间可以被具有平坦典则线丛的复结构的模空间和每个这样的复结构的凯勒锥参数化。

两个非常重要的凯勒 - 爱因斯坦度量存在性的结果是有关陈数和切丛稳定性的一些关系。全纯丛的稳定性是 Mumford 用复流形 M^n 的极化定义的 [159] 。 (一个极化是由一个凯勒类 $[\omega]$ 给出的。) 对每个秩 r 的向量丛 V ， V 的相对于 ω 的次数是由 $\deg(V)=c_1(V)\wedge\omega^{n-1}$ 定义的，且 V 的斜率定义为 $\frac{deg(V)}{r}$ 。丛 V 称为是 Mumford- 稳定的，如果 V 的任何凝聚子层的斜率都小于 V 的斜率。验证一个给定丛是否稳定不是件平凡的事情。注意到取子丛使曲率减少， Lübke[143] 证明一个容许凯勒 - 爱因斯坦度量 ω 的流形的切丛相对于 ω 定义的极化是稳定的。当数量曲率不为零时，所以，极化不是 $c_1(M)$ 就是 $-c_1(M)$ 。在这样的情形下，决定切丛相对于其它的极化是否是稳定的就很有意思。

我们注意到甚至当 ω 不是闭的时候也有稳定性的概念。既然第一陈形式的定义相差一个 $\partial\overline{\partial}f$, 其中 f 是一个整体定义的函数, 只要 $\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1})=0$ ， $\int_M c_1(V)\wedge\omega^{n-1}$ 就是良定义的。 Gauduchon[61,62] 研究了具有这个性质的埃尔米特度量，他证明了方程 $\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1})=0$ 总是可以用一个给定的 ω 的共形形变解出来。

就在作者 70 年代中期关于凯勒 - 爱因斯坦度量的工作后不久，作者和其他人试图找到全纯向量丛上类似的典则度量。自然的概念是一个埃尔米特 Yang-Mills 联络。考虑向量丛 V 上的埃尔米特联络。缩并曲率 F 的两个基本指标，那么 $\mathrm{tr}(F)$ 就成为 V 的自同态。我们要求 $\mathrm{tr}(F)=cI_V$ ，其中 c 是一个常数， I_V 是一个恒等自同态。

还有另一个概念， Gieseker 稳定性，从几何不变量理论的角度看也是同样的自然。一个全纯丛 V 相对于一个正线丛 L 是 Gieseker 稳定的，当且仅当对 V 的任何非平凡凝聚子层 S ，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{rank}S}\sum_i(-1)^i\mathrm{dim}H^i(M,S\otimes L^k)\\&<\frac{1}{\mathrm{rank}V}\sum_i(-1)^i\mathrm{dim}H^i(M,V\otimes L^k)\end{aligned}$$

对足够大的 k 成立。

从黎曼 - 罗赫定理，我们知道 $\sum_i(-1)^i\mathrm{dim}H^i(M,S\otimes L^k)$ 是一个关于 k 的多项式给出的，称为 S 相对于 L 的希尔伯特多项式。 Gieseker[69] 与 Maruyama[145] 证明了一个射影曲面上的 Gieseker 稳定向量丛空间构成一个拟射影簇。

为了解释 Gieseker 稳定性是如何产生的，我们注意到存在一个只依赖于 V 的大整数 k_0，使得当 $k \geq k_0$ 时，对 $i > 0$ 成立 $H^i(M, V \otimes L^k) = 0$，并且 $V \otimes L^k$ 是由整体截面生成的。考虑具有固定希尔伯特多项式的全纯丛 V 的族，使得 $\wedge^r V$ 同构于一个固定的线丛 H。（这里 $r = \text{rank} V$.）令 $W = H^0(M, H \otimes L^{rk})$。

那么从黎曼 - 罗赫定理，$\dim H^0(M, V \otimes L^k)$ 是常数且 $H^0(M, V \otimes L^k)$ 可以与一个固定的向量空间等同。我们有一个自然的同态

$$\bigwedge^r S \longrightarrow W$$

决定了 V 的全纯结构。群 $SL(S)$ 作用在 $\text{Hom}(\wedge^r S, W)$ 上，得到的商空间，合适的加以定义，就是所有这样的 V 的模空间。

Gieseker 证明了在几何不变量理论的意义下，Gieseker 稳定性等价于这样的 $SL(S)$ 的一个作用。

我以前的学生 Conan Leung[121] 在他的论文中考虑了丛上的酉联络的空间 U，来解释 Gieseker 的工作。设 D_A 是丛 V 上的这样一个联络，令 B 与 C 是 U 在 D_A 的切向量。同样，令 ω 是流形上的凯勒形式，且 $k > 0$ 是一个整数。那么我们定义 U 上的一个如下 2 形式

$$\Omega_k(D_A)(B, C) = \int_M \text{tr}\left[B \wedge e^{(k\omega I_V + \frac{i}{2\pi} R_A)} \wedge C\right]_{\text{sym}} \text{Td}(M)$$

这里 $[\ ]_{\text{sym}}$ 表示形式的分次对称积，R_A 是 D_A 的曲率 2 形式，ω 是凯勒形式，I_V 是恒等自同态，及 $\text{Td}(M)$ 是 Todd 类。

当 k 足够大时，$k\omega$ 控制 R_A，且 Ω_k 成为非退化辛形式。规范群 G 相对于这些辛形式辛作用在 U 上。

力矩映射可以计算出来如下

$$\begin{aligned} &\mu_k : U \longrightarrow (\mathcal{G})^* \\ &\mu_k(D_A) = \left[e^{k\omega I_V + \frac{i}{2\pi} R_A} \text{Td}(M)\right]^{2n}, \end{aligned}$$

其中 $(\mathcal{G})$，G 的李代数，可以等同于 M 上的自同态值的最高次形式。

一般来说 $\mu_k^{-1}(0)$ 可能为空。所以我们选择 ω^n 的一个常数倍，且力矩映射方程如下给出

$$\begin{aligned} &\left[e^{\frac{i}{2\pi} R_A + k\omega I_V} \text{Td}(M)\right]^{2n} \\ &= \frac{1}{\text{rk}(V)} \chi(M, V \otimes L^k) \frac{\omega^n}{n!} I_V \end{aligned}$$

这是 Leung 的方程。他注意到当 $k \to \infty$ 时，方程就成为 Donaldson-Uhlenbeck-Yau[5] 方程。他证明了如果 V 不可约，上述方程对足够大的 k 的一致有界曲率解的存在性就本质上等价于 Gieseker 稳定性。

Todd 类的引入也许对分析本身不是本质的，虽然它确实给出了引导我们通向 Gieseker 稳定性概念的希尔伯特多项式。如果我们把 Todd 类用其他的类代替，比如 $\hat{A}$ 类，我们也许可以得到其他的稳定性概念。

如果 V 是流形 M 的切丛且 V 上的背景凯勒 - 爱因斯坦度量是用来定义 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 方程的度量，我们就得到凯勒 - 爱因斯坦方程。因此我们可以把 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 方程解释为完全非线性的凯勒 - 爱因斯坦方程的（半）线性化。既然丛的稳定性是前者方程的存在性标准，作者很清楚的看到凯勒 - 爱因斯坦度量的存在性会和流形的某种非线性稳定性有关。所以在八十年代中期，我提出具有正定第一陈类的代数流形的 Gieseker-Mumford 稳定性应该是凯勒 - 爱因斯坦度量存在性的标准（参看 [227] ）。这个观点最近被田刚重新研究 [204] 。虽然他考虑了一个稍微不同的稳定性概念，我想我的最初的猜测是正确的。

如果我们设流形上的埃尔米特度量为 g 且切丛的度量为 h ，那么 g 不一定是凯勒的。然而，根据我与李骏的工作 [129]（参看 Buchdahl[21] 中的二维情形），埃尔米特 Yang-Mills 方程 $\mathrm{tr}(F(h))=\lambda I$ 在 g 非凯勒时仍然有意义。丛相对于度量 g 的稳定性概念仍然有意义，只要 $(\partial\overline{\partial}\omega_g)\wedge\omega_g^{n-1}=0$ ，其中 ω_g 是 g 的相配 (1,1)- 形式。如果丛相对于 ω_g 是稳定的，依然可以证明存在一个满足埃尔米特 Yang-Mills 方程的埃尔米特度量 h 。经过一个 h 的共形变换，我们得到 $\hat{h}$ 满足条件 $(\partial\overline{\partial}\omega_h)\wedge\omega_h^{n-1}$[61] 。因此如果是切丛，那么我们就有一个满足 $(\partial\overline{\partial}\omega_g)\wedge\omega_g^{n-1}=0$ 的埃尔米特度量 g 的空间到它自身的映射。我们忍不住相信这个映射的不动点的存在性和凯勒 - 爱因斯坦度量的存在性有关。了解是否存在其它的非凯勒的不动点会很有意思。在流形合适的稳定性条件下，上面埃尔米特度量空间自映射的迭代可能收敛到一个不动点。 Uhlenbeck-Yau[215] 中的论证也许可以加强来得到所需要的估计。这是一个有价值的方案：它不仅仅提供了凯勒 - 爱因斯坦度量存在性问题的解答，而且可能给出非凯勒流形上的典则埃尔米特度量。

虽然只有有限多个非凯勒曲面，很明显高维情形存在更多的非凯勒流形。此外，当我们下面给出更详细解释时，非凯勒流形上的典则埃尔米特度量会在弦论里发挥作用，因为根据 Reid[172] 的一个想法，这种流形可以用来连接所有卡拉比 - 丘成桐三维流形的模空间。

用这种丛度量来寻找非凯勒曲面上的典则埃尔米特度量的想法早已被李骏，郑方阳和我 [103] 在给出 Bogomolov 定理 [17] 的第一个全面证明中用到了，即不包含全纯曲线的 VII_0 类曲面是 Inoue 曲面 [105] 。这里一个很重要的观察是全纯曲线的非存在性其实可以帮助我们建立切丛在李骏和我在 [129] 里描述意义下的稳定性。一个还没有解决的问题是分类包含有限多条全纯曲线的 VII_0 型曲面。这不禁吸引我们去考虑一个类似的论证可以应用到余切丛，其上具有沿着这些曲线的极点。

对有很多子簇的流形，切丛稳定性的证明不是一件平凡的任务。特别是对于我们在 [129] 中介绍的稳定性概念。

Roček 在他的收录于镜像对称 I 文集 [173] 的文章中，提出了一类容许 (2,2) 超对称的非凯勒流形。他所加的条件非常强以至于无法得出有价值的例子。一个条件是流形 M 的切丛必须分裂为两个丛 $V_1\oplus V_2$ ，其中 $\det V_1$ 同构于 $\det^{-1}V_2$ 。此外，V_1 和 V_2 要求定义 M 上一个保证叶子是凯勒的叶化，即 M 容许一个整体的埃尔米特度量，当限制到叶子上时是凯勒的。了解这样一类流形的限制到底有多大是很有意思的问题。

当流形容许具有负数量曲率的凯勒 - 爱因斯坦度量，我能够刻划那些被球和其它埃尔米特对称域单值化的流形 [224, 228] 。前者的刻划只依赖于陈数，而后者依赖于某些丛的非平凡全纯截面的存在性。陈数刻划已经被广泛的使用。然而，

一个非常有趣的问题还没解决。也就是，我们怎样从几何上刻划那些由算术群定义的秩一埃尔米特局部对称流形？我们当然可以用许多 Hecke 对应，不过这些条件不容易验证。

对可以被对称域覆盖的流形找一个拓扑刻划是一个非常有趣和困难的任务。在三维流形当然已经有 Thurston 的深入的定理。自然的我们可以通过假定流形是爱因斯坦的来简化问题。是否有一个黎曼几何中的合适的稳定性概念来帮助刻划局部对称流形？直到最近， Besson 等人 [13] ， LeBrun[119],Gursky-LeBrun[86] ，和 C. Leung[123] 能够在是秩一对称空间的爱因斯坦流形的刻划方面做出了进展。第一项工作是基于重心的概念，后面的工作都依赖于 Seiberg-Witten 不变量且只应用于四维流形。如我们前面提到的那样，主要的问题是缺少一个深入的爱因斯坦流形的存在性定理。

有一个存在性定理非常接近于爱因斯坦度量存在性， Taubes[198] 证明了一个不平常的定理，一个四维流形在经过有限个点处的爆破以后，有一个具有自对偶曲率的度量（即度量的曲率形式在星算子作用下不变）。这是由一个非常漂亮的奇异摄动的论证得到的。然而，这种度量的模空间很难控制，他们的存在性的拓扑含义也不明朗。如果可以应用类似的论证来产生爱因斯坦度量将会是很漂亮的。要指出的是， Taubes 的定理产生出许多复三维流形，也就是具有 Taubes 度量的四维流形的扭子空间。什么是这些三维流形上的典则非凯勒的埃尔米特度量？

现在我们讨论非凯勒的爱因斯坦度量的的几个问题. 对这些度量, 负的数量曲率的情形了解得相当多, 甚至是非紧凯勒流形。可是, 许多问题, 特别是和 Arakelov 几何的关系，还需要继续研究。

在复的一维情形，这些度量就是庞卡莱度量。可是，一个很难的问题是，用定义射影空间中代数曲线的齐次多项式来给出这个度量的显式的表达式。这个问题相当于用上半平面给出这条曲线的一个显式的单值化。我们可以用 Weierstrass $\wp$ 函数单值化 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲线。对某些非紧曲线，可以在 Picard-Fuchs 方程帮助下，通过超几何级数找出单值化。在他的论文中 [53] ， C. Doran 详细的研究了这类方程，他是通过观察一条曲线上的以椭圆曲线或 $K3$ 曲面为本质纤维的纤维空间。

在 1979 年我在普林斯顿提出的一百条几何问题，其中一条是猜测代数流形上的这些度量可以用通过典则线丛高次幂来射影嵌入到射影空间中所诱导的度量来逼近，其目的是想研究凯勒爱因斯坦度量和几何稳定性的关系。在我的指导下，田刚在他的哈佛论文 [201] 中，用了萧荫堂和丘成桐的 $\overline{\partial}$- 局部化方法 [191] ，证明了我的猜想。 Zelditch[231] 在最近的文章中用渐近谱分析方法改进了估计。这种嵌入在 Arekelov 几何中有应用，如张寿武的研究 [232] 。

一个相关的对象是拟射影流形 $M\backslash D$ 上的完备凯勒 - 爱因斯坦度量，在 1978 年的赫尔辛基数学家大会上我指出在 Ricci 平坦和 Ricci 为负的基本做法以后，由郑绍远 - 丘成桐做了研究 [41] ，后来是田刚 - 丘成桐 [207] 等等。（这里 M 是代数的， D 是一个正规相交的除子，以及 $K_M \otimes [D] > 0$. ）即使度量在 D 附近的主项已知，仍然有可能找到度量沿 D 的一个渐近展开。

凯勒 - 爱因斯坦度量的用途之一是提供了研究复流形的解析工具。给一个射影流形 M ，他的万有覆盖是一个非常超越的对象。可是，我们可以抓住它的代数含义。作者在十多年前提出的一个自然的问题是，找一个从 M 的万有覆盖到另一个代数流形 N 的开子集的亚纯映射，使得 M 的覆叠变换可以延拓为 N 的一个双有理变换。虽然这个命题也许对所有射影流形来说太过于乐观，但是它应该不会差得太远。一个重要的问题是，怎样生成具有最慢增长的全纯函数。例如，如果我

们想要把 M 的万有覆盖实现为有界区域，我们需要生成有界全纯函数。R. Schoen 与作者的确有一个可以产生覆盖紧流形的流形上有界调和函数的方法 [187] 。（对具有强负曲率的流形，这个问题首先由 Sullivan[196] 和 Anderson[2] 做了研究。）另一方面，全纯函数有更强的限制，还没有得到任何处理它们存在性的方法。

在负数量曲率的凯勒 - 爱因斯坦度量理论中，凯勒类是典则的且第一陈类是负的。在这个情况下，度量是由复结构决定的。因此，任何凯勒 - 爱因斯坦度量的不变量都给出了复结构的内蕴不变量。例如，这种度量产生的拉普拉斯算子作用在流形的各种自然丛上。和这些拉普拉斯算子的特征值相关的 zeta 函数应该具有和复结构关联的有趣性质。但是，除了 Ray-Singer[171] 引入的全纯扭矩，对这些 zeta 函数所知甚少。用这些关于特征值的信息给出凯勒 - 爱因斯坦流形模空间的一个紧化会很有趣。能否用微分几何方法证明流形上的射影结构族只有有限多个分支？Catanese-LeBrun[36] 和 Kotschick[117] 的一个有趣的结论说，确实存在两个微分同胚的凯勒 - 爱因斯坦流形的例子，其上的数量曲率具有相反的符号。Seiberg-Witten 理论的一个最主要的成就是证明了对凯勒曲面，这是不可能的 [57] 。

为了理解模空间紧化的问题，一个自然的途径是研究它的 Weil-Petersson 度量。一般来说，Weil-Petersson 度量不是完备的，且有无界曲率。可是，它的 Ricci 张量在一个紧集外可能是负定的，且它的行为应该反映出模空间上典则凯勒 - 爱因斯坦度量的行为。凯勒 - 爱因斯坦度量模空间的具有负数量曲率的 Weil-Petersson 度量和凯勒 - 爱因斯坦度量模空间上的 Ricci 曲率为零的 Weil-Petersson 度量有很大的不同。在前面的情形，我们很可能期望 Ricci 曲率有一个上界；而在后者情形，Ricci 曲率应该有一个下界。证明他们具有有限体积应该很有趣。 C.-L. Wang[217] 已经理解了 Ricci- 平坦凯勒流形模空间上的 Weil-Petersson 度量在模空间的奇点处完备的条件。

能否紧化一个体积有限且 Ricci 曲率有下界的完备凯勒流形？许多年前，我倡议了用几何手段紧化具有有限体积的完备流形的纲领。（参看 Siu-Yau[191] ）我建议莫毅明 - 钟家庆和我的学生郑方阳研究这个纲领。虽然这个纲领还没有完成，已经有了很多进展，如 Mok-Zhong[154],Mok[153],Yeung[230], 以及郑方阳与我的未发表的工作。

自从理论物理中的弦论革命以来， Ricci 曲率为零的凯勒流形理论（即卡拉比 - 丘成桐流形）已经经历了巨大的变化。 Candelas,Horowitz,Strominger 和 Witten 的基本文章 [28] 研究了 Kaluza-Klein 模型，其中希望把一个十维时空通过具有非平凡平行转子的紧致六维流形来紧化成一个四维时空。最后的分析表明，这个紧化是由一个具有复三维的卡拉比 - 丘成桐流形给出的。这篇著名的文章立刻引起了大量的构造这种流形的工作，特别是那些欧拉数等于 ± 6 和具有非平凡的基本群的流形。刚开始，物理学家认为只有很少的三维卡拉比 - 丘成桐流形。在弦理论的第一次重要会议上 [226] ，作者描述了许多构造这种流形的办法，物理学家们非常惊奇的发现至少存在上万个这样的流形。作者提议通过对加权射影空间中的超曲面作完全交来得到一大类这些流形。第一个重要的例子是 $\mathbb{CP}^3 \times \mathbb{CP}^3$ 中的两个三次曲面和一个 (1,1) 次超曲面的完全交。这个流形的欧拉数等于 -18 。我可以找到一个无不动点地作用在其上的 3 阶群。那么商流形的欧拉数等于 -6 且具有非平凡的基本群。田刚与作者 [206] 然后用类似的方法发现了更多的例子。 B. Greene 注意到所有这些构造产生出的流形具有相同的拓扑。 Greene 和他的合作者甚至讨论了这些流形的现象学含义 [3] 。

卡拉比 - 丘成桐流形的第一个一般性理论是 Piatetski-Shapiro 和 Shafarevich 关

于二维曲面的研究 [167](Burns-Rapoport[22] 关于凯勒流形的情形) 。他们发现 $K3$ 曲面的模空间的周期映射是单的。满射的问题很晚以后才由 Kulikov[118] 和 Pinkham-Perrson[166] 做了研究。这两篇文章都是深刻的工作，需要大量的代数工具。

这些定理由于 Todorov 的一个观点得到了彻底的简化 [210] ，即应用作者的 Ricci- 平坦度量的存在性定理。关键之处是 Hitchin[93] 观察到，这些度量提供了复结构的一个 S^2 族。这条复结构的有理曲线提供了进入模空间的一条途径。（更严格和详细的讨论由萧荫堂给出 [190]. ）我们期望把这些方法推广到高维的卡拉比 - 丘成桐流形。虽然这个还没有实现， Bogomolov[17] 的关于全纯辛凯勒流形的无阻碍性定理已经分别被田刚 [200] 在他的论文中和 Todorov[211] 独立的推广到了高维卡拉比 - 丘成桐流形。这个基本定理在卡拉比 - 丘成桐流形的后续发展中扮演了重要的角色。（这个证明无阻碍性的公式的一个类似被 Kontsevich,Fukaya 等人用来构造高阶的乘积，以试图给出镜像对称的代数解释 [8,59]. ）

弦论依赖于卡拉比 - 丘成桐流形模空间上大量的计算。既然局部 Torelli 定理成立，最高维全纯形式的周期就决定了模空间的局部几何。田刚 [200] 和物理学家注意到凯勒位势可以写成 $\log\|\Omega\|^2$ ，其中 Ω 是最高维全纯形式的一个局部全纯族。全纯 n- 形式定义了 n 维上同调类的（平坦）丛的一个子线丛的事实可以用来计算具有额外数据的 Weil-Petersson 几何。这个平坦丛相对于线丛的商描述了复结构的无穷小形变，因此给出了模空间的切丛。

有两个团队研究了这种几何（ Candelas 等 [27] 和 Strominger[194] ）。Strominger 称它为特殊几何（他起初称它限制型的凯勒几何，作者建议改名为特殊几何）。特殊几何在后来镜像对称的计算中扮演了很重要的角色。

Gepner[66] 和 Greene-Vafa-Warner[74] 的工作勾勒了怎样给某些卡拉比 - 丘成桐流形附加一个共形场论和一个道路积分。不久以后， Dixon[51] 和 Lerche-Vafa-Warner[120] 做了镜像对称的预测，断言对某个卡拉比 - 丘成桐流形，可以配上另一个卡拉比 - 丘成桐流形使得当从 M 过渡到镜像 M' ，两个三点关联函数（一个和复形变相关，另一个和凯勒形变相关）互相映到对方。 M 的复形变的关联函数就是 $H^1(T_M)$ 的自然的三重乘积（这个可行，因为 $\wedge^3 T$ 是平凡的）。凯勒形变的关联函数要复杂得多。除了 $H^1(T_M^*)$ 上的经典拓扑杯乘 (cup product) ，还需要校正由于在有理曲线上积分产生的误差。

B. Greene 与作者在 1990 年的 Berkeley 举办的首届镜像流形会议上，把上面的三重乘积称为量子杯乘。 Vafa 把这个环结构产生的上同调称为量子上同调。

对 $\mathbb{CP}^4$ 中的五次代数簇的重要例子，Greene-Plesser[73] 基于共形场论的论证证明了镜像的存在性。很快， Candelas 等人 [29] 在镜像存在的基础上，对关联函数做了完全的详细的计算。把特殊几何的凯勒和复的方面等同起来起了非常重要的作用。这样一个计算是数学上一项惊人的工作。它依赖于研究满足一个 Picard-Fuchs 方程的全纯三次形式的周期，以及理解和复结构退化相关的单值化。 Candelas 等人的工作极大的影响了过去十年的卡拉比 - 丘成桐流形的发展。特别的，他提供了计算五次代数簇上有理曲线数目（需要合理的加以定义）的一个漂亮的公式。这个公式的存在性在数学文献里没有想到的。以后的众多数学家的工作导致的进展基本上都是在不同形式下重新解释 Candelas 的公式。

当复形变空间是一维时， Candelas 的计算方法被许多数学家团体所采用。当形变空间是多维时，计算需要一个新的方法，这是分别由 Hosono-Klemm-Thiesen-Yau[99] 和 Candelas-de la Ossa-Font-Katz-Morrison[30] 独立得到的。更进一步的推广

在 Hosono-Lian-Yau[100] 中。在前一篇文章中，大量使用了 Frobenius 方法和 Gelfand-Kapranov-Zelevinsky[64,65] 的超几何方程组。 Frobenius 方法的形式参数后来被等变几何中的超平面类所代替。这就给了 Candelas 公式的正确的等变几何解释。

对任意凯勒流形讨论量子上同调环的结构是有意义的。对具有正的第一陈类的流形而言，量子上同调的结合律有时候足以决定瞬子和。这个结论来自 WDVV 方程，是一群物理学家的工作（参看 [223, 54] ）。对这些流形，数学家可以利用量子上同调的结合律来计算瞬子和。 Frobenius 流形概念的提出是为了理解这些计算，同时又导出了齐性流形中曲线计数的公式。另一方面，以后证明量子上同调的结合律的方法基本上是将物理学家的想法严格化。

这个结合律的第一个证明（对半正辛流形而言）是阮勇斌 - 田刚 [175] 给出的。首先，需要定义瞬子和的含义。当曲线亏格为零时，阮勇斌 [174] 对辛流形定义了一些特殊的情形。然后阮勇斌 - 田刚把这个扩展到任意亏格的曲线 [176] 。这个定义是建立在 Donaldson 的关于他的四维流形的规范不变量的定义基础上的。一个基本的构成是伪全纯曲线的紧性论证，本质上是 Sacks-Uhlenbeck[177] 的工作。Gromov[77] 注意到伪全纯曲线可以用来研究辛流形的刚性。阮勇斌 - 田刚的关于量子上同调的结合律的定义和证明只在相对于近复结构的一个本质的选择的伪全纯曲线可行。然而可积近复结构远不是本质的，所以瞬子和需要重新定义，如果我们仅仅限制到射影流形。

基于 Sacks-Uhlenbeck[177],Gromo[77],Parker-Wolfson[165] 等人的工作， Kontsevich[115] 定义了从带基点有理曲线到一个射影流形有理映射的模空间的紧化。当这个射影流形式某个齐性空间中的完全交，就有一种方法可以定义如上紧化空间上的某个阻碍丛。如果阻碍丛与映射的模空间有相同的秩，我们可以取丛的欧拉数。一般来说，要定义这个欧拉数，不得不用到李骏 - 田刚 [127] 最早做出的关于虚拟链的构造。对射影超曲面的一个本质选择，在一个固定拓扑下的曲线数目可以用这些欧拉数来定义。对 5 次代数簇，我们得到

$$K_d = \sum_{k|d} n_{d/k} k^{-3},$$

其中 K_d 是欧拉数， $n_{d/k}$ 是有理曲线的期望数目。这个公式，称为覆盖公式，是由 Candelas 等人 [31] 发现的，并且由 Aspinwall-Morrison[5] 和 Manin[144] 严格验证。数 n_i 是一个射影不变量，应该和上面提到的辛不变量有不同的称谓。一个自然的名称应该是 Schubert 不变量，来纪念 Schubert 在一个世纪前做的基础性工作。

Candelas 的五次三维簇的公式是如下的关于 T 形式幂级数方程：

$$\frac{5T^3}{6} + \sum_{d>0} K_d e^{dT} = \frac{5}{2}(\frac{f_1}{f_0}\frac{f_2}{f_0} - \frac{f_3}{f_0}),$$

其中 $T = \frac{f_1}{f_0}$ ， K_d 是如上的欧拉数，且对 $i = 0, 1, 2, 3,$

$$f_i = \frac{1}{i!}(\frac{d}{dH})^i|_{H=0} \sum_{d\geq 0} e^{d(t+H)} \frac{\prod_{m=1}^{5d}(5H+m)}{\prod_{m=1}^{d}(H+m)^5}.$$

其中 f_i 构成了 $L(f) = 0$ 的解空间的一组基，其中 L 是如下的超几何微分算子

$$L = (\frac{d}{dt})^4 - 5e^t(5\frac{d}{dt}+1)\cdots(5\frac{d}{dt}+4).$$

许多人认真的试图证明这个公式。 Witten[223] 定义了线性 σ 模型， Plesser-Morrison[157] 试图（未成功）用这个概念证明 Candelas 的公式。不过，他们确实表明了线性 σ 模型的重要性。不久以后， Kontsevich 努力的试图用 Atiyah-Bott 局部化方法来证明 Candelas 公式 [115] 。虽然他成功的计算了 5 次代数簇的次数为 4 的不变量，他的表达式过于复杂，以至无法一般性的实现。很重要的一点是注意到上面的 H 在 Frobenius 方法中（参看 [99] ）解释为等变超平面类。接着 Kontsevich 的工作， Givental[70] 做了另一个尝试，用到了 Witten 等人的想法和引进了量子微分方程（这些就是决定某个典则定义的联络的平坦截面的方程）。可是他的证明还不完全。最后，基于 Witten,Kontsevich,Li-Tian 的工作以及一些关于欧拉数据概念的新想法， Lian-Liu-Yau[134] 在 1997 年给出了 Candelas 公式的第一个完整的证明。 [134] 发表后六个月左右，两项试图完成 Givental 纲领的工作出现了。第一篇是 Procesi 等人 [14] 的另一篇是 Pandharipande[164] 。第一篇文章没有宣称证明 Candelas 公式的最终形式，第二篇文章用了 Lian-Liu-Yau 的一些想法。

虽然 Lian-Liu-Yau 的工作没有给出镜像流形的一个构造，但也确实提出了许多有趣的数学问题。应该把这个理论解释成代数流形的映射空间 σ 模型上的示性类理论或 K- 理论。这种 σ 模型的一个优点是它们允许我们把映射限制到从一个固定拓扑的曲线出发，从而得到一个有限维的映射空间。

Lian-Liu-Yau 理论中的一个重要问题是：给定一个代数流形 M 上的一个代数丛 V ，以及从亏格为 g 的曲线到 M 的具有同调类 $k \in H^2(C, f^*V)$ 的全体映射 $\mathcal{M}(g,k)$ 的稳定模空间，我们可以构造 $\mathcal{M}(g,k)$ 上的一个虚拟丛 $\tilde{V}$ ，方法是通过观察 $H^0(C, f^*V) - H^1(C, f^*V)$ ，其中 $f : C \to M$ 是 $\mathcal{M}(g,k)$ 中的一个映射。给定一个示性类的理论，也就是从全纯向量丛环到同调类的一个映射 b(可以改进到代数链)，我们可以考虑 $b(\tilde{V})$，以及和 $b(\tilde{V})$ 相关的几个数。例如，我们可以在 Li-Tian 类 [127]（ Li-Tian 定义为一个虚拟模空间链，后来被 Behrend-Fantechi[11] 用不同的方法加以理解）上估计 $b(\tilde{V})$ 的值，或者我们可以考虑 $b(\tilde{V})$ 和 $\mathcal{M}(g,k)$ 上的 tautological 线丛的陈类的乘积，然后在 Li-Tian 链上估计这个乘积的值。 Lian-Liu-Yau 的方法可以对很大一类丛 V 和 M 计算这些数。这些类特别的包含了，例如，环面簇或气球流形上的凸的和凹的丛。 $b(\tilde{V})$ 的计算可以看作是代数流形的 σ 模型上的 K- 理论。

在尽可能一般性的情况下实现 Lian-Liu-Yau 的计算是很重要的。同样重要的是解释计算所得数值的几何含义。当 b 是欧拉类而 $H^1(C, f^*V) = 0$ 时，这个数解释为与亏格为 g 的曲线计数有关。这就是我们计算 $\mathbb{CP}^4$ 中的一个本质 5 次代数簇上的有理曲线数目的方法。在那个情况下，取 V 为 $\mathbb{CP}^4$ 上的线丛 $\mathcal{O}(5)$ 。当 V 是 $\mathbb{CP}^2$ 上的 $\mathcal{O}$(-3)，我们其实是在处理"局部镜像对称"中出现的数，也就是 $\mathbb{CP}^2$ 中的嵌入到某个卡拉比 - 丘成桐流形成为超曲面的那些有理曲线的数目（参看 Vafa 等人的工作 [112] ，以及 Chiang-Klemm-Yau-Zaslow 最近的工作 [42] ）。 σ 模型上的所有这些示性数组成的集合与 Gelfand-Kaspranov-Zelevinsky[64,65] 的超几何级数密切相关。了解这些数作为一个从 K- 群到 M 的映射的内在结构将会非常有意思。

当 b 是欧拉类， Li-Tian 的一个著名定理说这就等价于计算一个和给定辛结构相容的本质近复结构的伪全纯曲线条数（至多相差一个符号）。用 Lian-Liu-Yau 的证明，我们应该能够扩展 Li,Ruan 和 Tian 的方法，用来证明生成函数的系数 n_d 都是整数。这将让数论学家和组合学家都很感兴趣。从超几何级数到生成函数的变换称为镜像变换。一个同样了不起的事实是，通过选择正确的坐标系，镜像变换有

一个很好的 q- 展开，其中系数都是整数（如同在 Hosono-Klemm-Thiesen-Yau[99] 中实验性的计算，由作者们公开化）。当镜像流形的形变是一维的，这个整性条件由 Lian-Yau[138] 验证。这是一个非常重要的事实，被 Lian-Yau 用来证明有理曲线数目的可除性。例如，证明了 n_i， 5 次代数簇的有理曲线数目，当 i 不能被 5 整除时，可以被 125 整除。可是，镜像映射这样的整数性质在多变量情形还不知道，这提出了一个富有挑战性的问题。注意当卡拉比 - 丘成桐流形的维数是 1 和 2 时，镜像映射和 j- 函数相关。其实， Lian-Yau[135,136,137] 注意到当卡拉比 - 丘成桐流形是 K3 曲面或卡拉比 - 丘成桐流形包含一族 K3 曲面时，镜像映射应该和自守型相联系，这出现在关于大魔群的月光猜想里。在 Chuck Doran 的哈佛论文里，他在这个问题上做出了重大的进展，他详细研究了 Painlevé VI 方程及其代数解 [53] 。

对偶性猜想在弦论最近的进展中在数论中有应用，正如 Moore-Witten[156] 的工作中所指出的那样。同样 G. Moore 提出了由变分原理决定的模空间上的某些特殊点处的镜像映射值的一些问题 [155] 。所有这些问题预示着在镜像对称理论中蕴藏着数论的非常丰富的结构。 Klemm-Lian-Roan-Yau[11] 发展了镜像映射中许瓦兹方程的一个推广。正是基于这些方程我们发现了有理曲线数目的可除性。

虽然 Lian-Liu-Yau 的理论可以用来处理许多重要的计数几何问题，它不能解释镜像流形的几何含义。如同我们在上面提到的， Strominger-Yau-Zaslow[195] 的构造，确实提供了这样一个框架。 Vafa[26] 最近拓展了 SYZ 猜想以把向量丛包含进来。虽然 Gross[80,81] 和 Hitchin[93] 在 SYZ 猜想上已经作了重要进展，离对 SYZ 理论的完全理解还很远。缺少的关键环节是一般卡拉比 - 丘成桐流形中特殊拉格朗日子流形和边界在给定拉格朗日子流形上的全纯圆盘的显式构造。

在任何情况下， SYZ 猜想的图景都很可能是正确的，把 Lian-Liu-Yau 的严格处理和 SYZ 的图景联系起来将会非常有趣。他预测了 Ricci 平坦度量的构造，很可能通过对瞬子纠错的理解可以推广到半平坦度量去。

许多年以前， Mukai[158] 注意到一个 K3 曲面上的 $SU(n)$ 丛的模空间有自然的超凯勒结构。（这可以推广到其他的超凯勒流形上去。）他引入了 Mukai 变换的概念，很明显与上面的理论有联系。我们有足够的信心，在不久的将来，会出现一个包含上面所有思想的理论。

另一个重要的问题是分类所有三维卡拉比 - 丘成桐流形，以及那些是椭圆纤维空间的四维卡拉比 - 丘成桐流形。一个非常相关的问题是，理解和乐群为 G_2 和 Spin(7) 的流形的构造。

直到最近， Joyce[106,107] 能够构造这种流形的非平凡的例子。它们是通过奇异摄动得到的，类似于 C. Taubes 有关四维流形上自对偶 $SU(2)$ 联络的构造。虽然这些流形明显的在最近弦论的进展中扮演了重要的角色，他们的整体结构仍然非常难以了解。我们如何对它们参数化？是否它们以系统的方式与凯勒流形相联系？我们应该如何理解这些流形上或卡拉比 - 丘成桐流形上的具有特殊和乐群的丛的模空间？

一个最近的弦论进展要求一个给定的卡拉比 - 丘成桐流形可以形变到另外一个。既然这些流形可能具有不同的拓扑，我们必须通过奇异流形来达到这个目的。我们允许把给出相同共形场论的流形等同起来。 Aspinwall-Greene-Morrison[4] 已经研究了卡拉比 - 丘成桐流形的共形场论的形变，在存在一个改变流形拓扑的 "flop" 构造的情况下。 Greene-Morrison-Strominger[72] 也讨论了当流形形变时量子场论的变化，来得到二重 (conifold) 点。这些理论表明甚至当目标空间具有奇点时，仍然可能存在好的物理理论。这意味着甚至当流形具有奇点时，我们可以发展一个好

的几何理论，。这包括这种奇异流形上的一个好的度量，一个好的 Hodge 理论，一个好的丛理论，以及一个好的计数几何。这些几何应该能够反映出上面提到的量子场论。特别的，我们希望找到新的几何不变量来捕获当一个光滑流形趋向一个奇异流形时的量子几何的极限。

在联系不同卡拉比 - 丘成桐流形的讨论中，一个特别重要的过程是由 M. Reid[172] 建议的(一些最初的想法可以追溯到 Clemens[45])。我们可以通过爆破具有负的法丛的有理曲线来消灭一个卡拉比 - 丘成桐流形的第二上同调。有 Clemens[44],Friedman[56] 和田刚 [203] 等人的关于如何把得到的奇异流形的复结构形变到一个光滑流形的复结构。这些流形不一定是代数的（虽然它们和代数流形双有理等价）。通过这种过程， Reid 建议把所有卡拉比 - 丘成桐三维流形连接起来。这是一个相当诱人的猜想。但是，通过光滑化得到的流形不是凯勒的，需要定义一个典则的埃尔米特度量来说明那些类似于由 Ricci 平坦度量给出的性质。基于这种典则度量的模空间上的 Weil-Petersson 度量将会很重要，因为它能够帮助识别镜像映射。

几年前， Zaslow 和我 [229] 证明了 K3 曲面中带节点的奇异有理曲线计数和自守型的关系。在这个公式启发下， Göttsche[71] 对更一般的凯勒曲面做了如下的猜想：

设 C 是 X 上足够丰富的除子， K 是典则除子。那么 $|C|$ 中的通过 $r=-KC+g-\chi(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ 个点的亏格为 g 的曲线数目可以由 $q^{\frac{1}{2}C(C-K)}$ 在如下的 q 的幂级数展开中的系数得到：

$$B_1^{K^2}B_2^{CK}(DG_2)^r\frac{D^2G_2}{(\Delta(D^2G_2))^{\chi(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})/2}},$$

其中 $D=q\frac{d}{dq}$ ， G_2 是 Eisenstein 级数

$$G_2(q)=-\frac{1}{24}+\sum_{k>0}(\sum_{d|k}d)q^k,$$

Δ 是判别式

$$\Delta(q)=q\prod_{k>0}(1-q^k)^{24},$$

且 $B_i(q)$ 是某些万有幂级数。

当上同调类是本原时， Bryan-Leung[20] 在 K3 曲面的 Yau-Zaslow 公式的严格证明上走出了第一步。引人注目的是最近刘艾克 [142] 得到了对一般的凯勒曲面的公式。（一些特殊的情形是与李天军合作得到的。）利用一族 Seiberg-Witten 不变量的想法，他也研究了同时是椭圆纤维空间的三维流形上的类似问题。曲线计数的生成函数与自守型的关系相当神秘。也许这些形式的一般性理论在不远的将来会发展起来。

除了 WDVV 方程和镜像对称理论，还有 Seiberg-Witten 方程理论。Taubes[199] 最早证明 Seiberg-Witten 不变量与一个辛流形中的伪全纯曲线的计数相关。这个定理为四维辛流形的结构理论打下了基石。 Taubes 定理的一个基本平凡的推论是， $\mathbb{CP}^2$ 上只有一个辛结构。（还不知道这是否对同伦 $\mathbb{CP}^2$ 也成立，我证明了当辛结构是凯勒的时候是对的。） Taubes 关于 $\mathbb{CP}^2$ 的定理被刘艾克和李天军推广到了其他的有理曲面上 [126] 。

回到卡拉比 - 丘成桐流形的分类，了解这些流形间的几何配边理论是很有趣的。什么时候卡拉比 - 丘成桐流形是同一个具有 G_2 和乐群的七维流形的边界？对 G_2- 流形，我们也可以问它什么时候是 Spin(7) 流形的边界。 G_2 流形和三维或四维的卡拉比 - 丘成桐空间有密切的关系。如何描述呢？我们很可能需要容许带奇异点的空间。

对 Ricci 曲率为正的流形，拉比猜测的解给了正 Ricci 曲率紧凯勒流形的拓扑的一个很好了解。当流形不是凯勒的，问题的解并不一样。甚至对怪球面，这个问题也还没有全部回答。一个诱人的猜想是如下的：

一个怪球面容许正的数量曲率当且仅当它是一个旋量 (spin) 流形的边界。一个怪球面容许正 Ricci 曲率度量当且仅当它是一个可平行流形的边界。一个怪球面容许正截曲率度量当且仅当它可以写成一个紧流形的向量丛。

第一个命题从 Stolz[192] 定理知道是对的, 证明用到 Schoen-Yau[184] 和 Gromov-Lawson[78] 的手术结果。同样，第二与第三部分的充分性也已知是正确的。

Cheeger-Gromoll[37] 的著名定理基本上把非负 Ricci 曲率的流形的研究简化到具有有限基本群的情形。是否每个有限群都可以作为一个正 Ricci 曲率紧流形的基本群出现？特别的，还不清楚是否正 Ricci 曲率的连通和容许正 Ricci 曲率度量。Stolz[193] 建议用如下方法把著名的 Lichnerwicz 定理推广到环路 (loop) 空间：如果 M 的 Ricci 曲率是正的，且 $\frac{1}{2}p_1(M)$ 是零，那么 M 的 Witten 指标等于零。注意 $\frac{1}{2}p_1(M) = 0$ 解释成 M 的环路空间是旋量的。但是，对这样一个猜想还没有足够的证据。

找到一个条件来看是否有对正 Ricci 曲率的流形上正数量曲率的爱因斯坦度量存在性的阻碍将会很漂亮。对维数大于 5，很可能没有任何阻碍。甚至当流形是凯勒的，正数量曲率爱因斯坦度量的存在性也还是一个公开的问题。虽然有自同构群是可约的（ Matsushima 的一个定理 [146] ）和 Futaki 不变量 [60] 必须为零两个已知的阻碍，作者相信关键的阻碍应该来自于极化复结构的 Mumford 和 Gieseker 的几何不变量理论中定义的稳定性概念。

有可能 R. Hamilton 的方程在这个问题中有用。他的方程确实保持复结构，曹怀东 [32] 证明了这个方程的长时间解的存在性。基本的估计如 Harnack 不等式也由曹怀东得到 [33] 。一些孤立子解也为曹怀东所发现 [34] 。剩下的一个重要问题是分类所有这样的孤立子解。凯勒 - 爱因斯坦度量和凯勒孤立子的唯一性问题分别有 Bando-Mabuchi[7] 和田刚 - 朱小华 [209] 所研究。 Hamilton 方程的渐近行为也许和稳定性问题相关。

对正数量曲率的凯勒流形而言，正数量曲率的凯勒 - 爱因斯坦度量并非一定存在, 研究稍微更广一些的爱因斯坦度量的形式也许会更有趣。Conan Leung 的想法也许可以导致稍微更广一些的度量（参看他最近的文章 [122] ）。可是 Leung 证明了这样一个度量的存在性可以推出 Futaki 的不变量。这些也许是最广泛的可以研究的典则度量。研究和量子上同调的可能联系也许也会有用。

C. 数量曲率. 虽然数量曲率是维数大于 2 的紧流形上最弱的不变量，它在广义相对论中扮演了重要的角色。当洛仑兹度量限制到一个类空超曲面时，数量曲率基本上表示质量的分布。（精确的质量分布包括来自类空超曲面的第二基本形式的贡献。）

物理学上的解释需要数量曲率的正性比负性更有意义，因为通常的质量密度假定是非负的。物理直觉是正数量曲率流形理论发展的非常好的向导。

第一个成果是狄拉克算子的结论。Lichnerwicz 证明了下面的消没定理 [139]：对旋量流形，从 Atiyah-Singer 指标定理，可以推出流形的某个 KO 示性数必定为零。在很长时间里，这是仅有的知道的拓扑常数。正质量猜想的问题是在 1973 年斯坦福大学微分几何会议时提出来的。很快就注意到一个简单的问题是，三维环面上是否存在正数量曲率的度量。Schoen 和我成功地证明了这样的度量不存在 [182] 。证明依赖于不可压缩极小曲面的存在性定理（这也由 Sacks-Uhlenbedk 独立的得到 [177] ）以及对第二变分公式的细致研究。特别的，我们证明了当一个三维流形的基本群容许一个子群与亏格不小于 1 的曲面的基本群同构时，其上不存在正数量曲率的完备度量 [185] 。

到 1978 年，我们已经能够彻底的解决正质量猜测 [183] ，我们也能够把关于正数量曲率度量的定理推广到高维 [184] 。基本的证明原则是对维数进行归纳。我们发现对一个具有正数量曲率的流形中的稳定极小超曲面，我们可以（利用第二变分算子的第一特征函数）把度量共形形变到一个正数量曲率的度量。外围流形的拓扑性质必须用来保证这种极小超曲面的存在性。例如，流形的第一上同调必须有足够的类来提供非平凡的相交。

同年，利用我们证明正质量猜测的想法，我们证明了，直到余维数 3 ，可以在正数量曲率流形的范畴内作手术 [184] 。（这个基本的事实后来也被 Gromov-Lawson 用一个不同的构造得到 [78] 。）这个手术的结果使得旋量配边理论的工具可以应用到正数量曲率流形的研究中。Stolz[192] 证明了下面的重要结果： Lichnerwicz 定理中的阻碍是单连通流形类中唯一的阻碍。

虽然我们有了把 Lichnerwica 消没定理扩展到具有非平凡基本群的流形的初步结果， Gromov-Lawson 为之发展了一套广泛的理论。他们认为来自 $KO[\pi_1]$ 的阻碍的消没对正数量曲率度量的存在性来说已经足够好了 [79] 。最近 Schick[178] 的工作显示这是不对的，因为 Schoen-Yau 的关于极小超曲面的阻碍没有考虑进来。

一个公开的问题是，找到一个流形容许正数量曲率度量的充分必要条件。一个有趣的问题是证明，如果流形 M 表示 $H^*(K(\pi,1),\mathbb{Q})$ 中的一个非平凡的同调类，对某个群 π ，那么它不容许正数量曲率的度量。在 Schoen 和我于 1981 年在 Berkeley 开设的一个关于正数量曲率度量流形的课程里，我们解决了这个问题当 $\dim(M)\leq 4$ 的情形。在过去十年中，有 A. Connes 等人的利用算子代数想法的工作（参看 [9] ）。可是，还没有最后给出这个问题的解。手术的论证方法在 $\dim(M)\leq 4$ 时意义不大。Schoen-Yau 的结果可以推出正数量曲率三维流形必是具有有限基本群的流形的连通和 [185] 。如果庞卡莱猜想和球面空间形式猜想成立，那么相反的命题也对。

当 $\dim(M)=4$ ，最好的结果是刘艾克和李天军 [125] 给出的。他们给出了一个辛流形容许正数量曲率度量的充要条件。

除了和拓扑有关的问题，正数量曲率流形的几何也是一个富有成果的课题，既然它和广义相对论的问题密切相关。例如，下面的命题（参看 Schoen-Yau[186] ）在黑洞理论中有重要的意义：

对一个紧致三维流形 M ，算子 $-\Delta_M+\frac{1}{2}R_M$（具有 Dirichlet 条件）的第一特征值以 $\frac{4\pi^2}{3r^2}$ 为上界，其中 r 是任何沿着 M 中闭约当曲线 σ 的管子的最小半径，要求 σ 在管子内是同伦平凡的。

应该有可能把这种结果推广到高维流形。

我们期望带边紧流形的正质量猜想的一个很好的表述，可是现在还不知道。正质量定理，以及 Schoen 关于著名的 Yamabe 问题的解 [180] ，被 Schoen 和作者

用来研究区域 $\Omega \subset S^N$ 的共形平坦的，正数量曲率度量 [187] 。

20 年前， Penrose 做了一个广义相对论中的猜想，全质量在相差一个常数的意义下，大于黑洞面积的平方根。当类空超曲面具有非负数量曲率，这个猜测最近被 Huisken-Ilmanen[103] 和 Bray[19] 所解决。处理数量曲率不是非负的情形还是一个公开的问题。

广义相对论的一个非常有趣的问题是如下的：对一个非负数量曲率的紧致三维流形， ∂M 的霍金质量不会大于 ∂M 的直径的一个固定的倍数，除非 M 中有一个闭的稳定极小曲面。当然，上述命题有一个到非正数量曲率流形的推广。这些命题和黑洞的形成有关。

III. 结论. 我想在这里总结一下这个报告中的最重要的部分，提出一些重要的问题也许是比较合适的。

1. 理解 n 维流形到 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维欧氏空间的的等距嵌入的存在性与唯一性的准确内涵。当流形是紧致无边的，是否存在非平凡的等距形变？

明显的，在 $n=2$ 和 $n>2$，局部和整体的嵌入，度量的实解析的和光滑的假设之间存在差异。对 $n=2$ 时的整体嵌入，有 Weyl[221], Nirenberg[162] 和 Pogorelov[169] 的工作。对局部嵌入，有林长寿的重要工作 [140] 。$n=2$ 时的整体唯一性是由 Cohn-Vossen 研究的 [46] 。相应的线性化算子的唯一性问题也非常重要，有 Cohn-Vossen 做了研究。虽然线性化的问题本身是有趣的，它明显的和非线性问题有关系。对这样的线性算子，有可能既不是椭圆的又不是双曲的，发展一套整体的理论。假定 M^n 的曲率算子是正定的，并且嵌入在 $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 中。是否线性化算子的核是只由无穷小刚体运动组成？是否在这个情况下有任何应用指标定理的方法？

等距嵌入问题要求在抽象法丛上找一个黎曼联络，通过（未知的）第二基本形式与切丛上的 Levi-Civita 联络结合，一个平坦联络就形成了。（高斯方程和 Codazzi 方程都需要用到。）从这个观点看，注意到 $n>2$ 时法丛一般是可以分解的。这也许是等距嵌入并非唯一的一个原因。也许需要把法丛分解为几个子丛，然后根据法丛的分解分几个部分来构造所需的黎曼联络和第二基本形式。几何上来说，我们考虑等距嵌入结构化的可能性，通过把 M^n 嵌入到 $M_1^{n_1} \subset M_2^{n_2} \subset \cdots \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 中，其中 $n < n_1 < n_2 < \cdots < \frac{n(n+1)}{2}$ 。如果我们在等距嵌入上加入某种结构化，也许会迫使唯一性和存在性定理变得更容易证明。例如，可以首先把一张任意亏格的曲面嵌入到合适的双曲三维空间中。我们也可以把亏格为一的曲面通过一个合适选取的三维流形等距嵌入到 $\mathbb{R}^4$ 中。

应该有一种有效的方法来验证是否 M^n 上的一个度量可以等距嵌入到另一个维数 $< \frac{n(n+1)}{2}$ 的流形中去。当 $n>2$，当余维数不大于 $n-1$ 时我们有仅知的唯一性定理。当 $n>2$ 时几乎不知道任何存在性定理。

一个有趣的余维数为一的整体存在性定理可以作为我与 Schoen 的工作的推论得到 [183]：给定一个三维流形上强渐近平坦的度量（质量为零）。假设对某个在无穷远处二次衰减的对称张量 h_{ij}，下面的不等式成立

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[R - \sum h_{ij}^2 + \left(\sum h_{ii}\right)^2\right] \\
&\geq \left[\sum_i \left(\sum_j h_{ij,j} - \sum_j h_{jj,i}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

那么这个度量可以等距嵌入到平坦 Minkowski 时空中，作为一张类空超曲面。

2. 理解一个完备流形的拉普拉斯算子的谱。什么是 $\mathbb{R}^+$ 中的一个离散数集成为某个流形的拉普拉斯算子的谱的精确条件？目前，只知道必要条件。当流形有一个特殊结构，例如，它有一个爱因斯坦度量或是一个极小子流形，我们期望存在更多的对称。（对称性也许在相关的 zeta 函数中体现。）对一个本质的度量，谱应该决定这个度量。我们如何证明这个命题？

设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots\}$ 是一列非负数。（某些 α_i 可能重复有限次。）它们要成为谱，有两个熟知的重要条件。

(a) 有一个正整数 n(维数)使得 $\sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\alpha_i t)$ 有渐近级数展开 $t^{-n/2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$ 。

(b) 由 $\sum_{j=1}^{\infty} \exp(i\sqrt{\lambda_j} t)$ 定义的分布有奇异的紧支撑，在一列可数的数 $\{l_i\}$ 中。

(a) 和 (b) 都是关于序列 $\{\alpha_i\}$ 的渐近信息。第一个是热不变量，第二个是波不变量。除非我们有更多的关于流形的先验信息（比如是一个极小超曲面 [38] ），我们不知道其它的使 $\{\alpha_i\}$ 成为流形的谱的约束。

既然这些都是渐近约束，一个有趣的问题是研究当它们是一个流形的谱时，序列的有限部分会提供多少信息。如果 α_i 和 β_i 是可以实现为两个流形的谱的序列。如果 $t^{n/2}(\sum_i e^{\alpha_i t} - \sum_i e^{\beta_i t}) = 0(t^m)$ 对任何 $m > 0$ 当 $t \to 0$ 并且如果 $\sum_j (e^{i\sqrt{\lambda_j} t} - e^{i\sqrt{\beta_j} t})$ 作为一个分布没有奇点，我们能否断定 $\alpha_j = \beta_j$ 对所有 j 成立。

热不变量是局部几何量的积分，而波不变量更具整体性且与闭测地线的长度有关。能否通过考察其它的关于拉普拉斯算子的函数，通过研究特征值的子序列空间，或者通过从特征值构造新的序列（比如取特征值的差），来构造更多的几何不变量。

当我们说我们可以“听到”一个几何量 g ，我们应该是指对所有的 $\varepsilon > 0$ ，有一个整数集合 $\{n_1, \cdots, n_k\}$ 使得 n_i 只依赖于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_{i-1}}$ 和 ε ，且存在一个定义在 $R_T^{n_k+1}$ 上的函数 f 满足

$$|f(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_k}, \varepsilon) - g| < \varepsilon.$$

目前，还不清楚如何“听到”流形的任何几何量。除非我们对流形有一个先验的了解，甚至还不清楚我们能否听到流形的维数。对一个凸区域， Peter Li 和作者确实找到了听到它的面积的方法。在我们知道 Ricci 曲率是有下界的情况下，能够听出流形的体积将是非常漂亮的。

完成已知的爱因斯坦流形和闭子流形的完整的谱是很重要的。只有少数的例子已经得到了计算，它们是由群论的方法构造的。

3. 找到一个显式的方法来给出 $\mathbb{R}^n$ 或 S^n 中的一大类极小子流形。是否所有的校准极小子流形可以用这样一个显式的方法得到。在具有特殊和乐群的外围流形中生成它们将会特别有趣。（在卡拉比 - 丘成桐流形的情形，我们考察特殊拉格朗日子流形。）计算这些极小子流形的模空间。

找出一类由一阶椭圆方程组定义的常平均曲率超曲面也许是很有意思的。在大多数类中，我们也许需要参数化那些具有某些几何结构的校准子流形。例如，在卡拉比 - 丘成桐流形中的特殊拉格朗日子流形的情形，我们和酉平坦线丛一起参数化。在其他的情形，它可以是某些扭化的调和转子。找到这些具有外在结构的子流形的模空间的一个好的紧化是一个有趣的问题。 Weyl-Peterson 度量在奇点附近的行为应该很有意思。注意极小子流形的序列总是在几何测度论的意义下收敛到一个极小流，问题就是如何推广定义在这些极小流上的平坦线丛或扭化调和转

子。我们希望紧化的模空间有额外的结构，例如（可能奇异的）代数结构。它们能否实现为某个代数几何对象的模空间？

4. 分类容许爱因斯坦度量的紧致光滑流形。如果 $\dim M > 4$，是否 M 总是容许一个爱因斯坦度量？如果是的，我们能否对其参数化？

是否有条件保证爱因斯坦度量的模空间具有有限多个分支？对奇数维 ≥ 5 的流形，有 Wang-Ziller 在 Journal of Diff. Geom.,1990 的例子，其中找到了无穷多个分支。这个问题在维数等于 4 和 6 时已经很有趣了。当我们改变 M 的拓扑，爱因斯坦度量的模空间的拓扑如何变化？大多数具有非平凡连续族的爱因斯坦度量的流形来自于凯勒 - 爱因斯坦流形上的环面丛或具有特殊和乐群的流形。是否还有其他的？在 4 维情形，能否把 M^4 分解成如下形式的开的片 (a) 爱因斯坦流形 (b) 常曲率 3 维流形上的圆周丛 (c) 另一张曲面上的曲面丛。

上面的开片据推测会沿着 S^2 或 T^2 上的圆周丛的三维流形彼此连通。对维数 3，有 Thurston 几何化猜想的类似命题。

5. 分类具有特殊和乐群的紧致黎曼流形。主要的和乐群是 $SU(n)$， Spin(7) 和 G_2。证明在每个维数都只存在有限多个这种流形的形变类型。

非常可能的是，和乐群为 Spin(7) 和 G_2 的流形可以从那些和乐群为 $SU(n)$ 的流形的几何构造得到。所以，找一个这些模空间上的类似于卡拉比 - 丘成桐流形上的特殊几何的典则结构，将是很有意思的。这些流形上还有校准子流形和具有特殊和乐群的丛。什么是这些流形的“镜像对称”的确切含义？例如，在这种几何下，能否找一个计数校准子流形的方法。一个和乐类被某个校准子流形表示的条件是什么？在凯勒 - 爱因斯坦曲面中的拉格朗日极小曲面情形下，已经由 Schoen-Wolfson 作了广泛的研究。

6. 证明如果 M^{2n} 容许一个近复结构且 $n > 2$，那么它也容许一个可积近复结构。当 $n = 2$ 时，存在熟知的阻碍。任何第一 Betti 数为偶数的复曲面可以形变到一个代数曲面，任何代数曲面容许一个 Lefschetz 纤维化（可能经过几次爆破）。所以，找到一个使曲面丛（具有 Morse 型奇点）容许一个复结构的充分条件是很有意思的。找到一个四维流形同伦型容许一个奇异曲面丛结构的条件也很有趣。这个方向上可以研究的一类很有意思的流形是复球的商，我们知道它是整体刚性的。一个相关的问题是怎样把复流形粘连起来。 Seiberg-Witten 不变量和相对的伪全纯曲线理论也许可以帮助我们理解这个粘连。另一个方向是对分支覆盖在 $\mathbb{CP}^2$ 或 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 上的四维流形找一个容许复结构的充分条件。

从 Bogomolov 和 Li-Yau-Zheng[130] 的工作，我们知道怎样分类没有曲线的小平 VII 型曲面。还剩下分类那些具有曲线的情形。 [124] 中的论证也许会有用。

一个重要的问题是，找到一大类合适的具有典则埃尔米特度量的非凯勒复流形。弦论也许为寻找这种埃尔米特度量的可能方程的提供了一些指导。特别重要的是找到对卡拉比 - 丘成桐流形的奇点光滑化后得到的复流形上的典则埃尔米特度量，而这些卡拉比 - 丘成桐流形是通过沿着一条具有负法丛的有理曲线爆破得到的。我们希望找到的流形具有超对称性质，使得镜像对称仍然存在。

7. 找到一个复流形容许凯勒结构的必要和充分条件。证明任何凯勒流形可以形变到代数流形。

对一个凯勒流形来说，我们有关于上同调的著名的 Lefschetz 和 Hodge 定理。 Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan 定理也要求有理同伦型形式上是确定的。这些是除了它是复流形以外的不太知名的必要条件（它也基于指标定理给出了关于陈数的可积性条件）。如果一个复流形在它的同伦型上满足所有这些条件，它是否就同伦等价于一个凯勒流形？对应的关于微分同胚型的问题要微妙的多。例如，作者用

陈数刻划了和具有常全纯截曲率的代数流形同伦等价的凯勒流形。

8. 给定第一陈类为 (k,k) 型的代数流形上的一个复向量丛 V ，如果我们在 K 理论意义下对 V 加上或减去全纯丛，是否 V 容许一个全纯结构？证明 Hodge 猜想，即有理 (k,k) 类庞卡莱对偶于代数链。

构造复向量丛上的可积复结构的仅有的进展属于 C. Taubes[198]，来自于一个四维流形上反自对偶联络的存在性。可是这没有告诉我们太多关于高维流形的情况。甚至在四维流形情形，我们也必须限制到当丛是通过冒泡过程拓扑的构造出来的。我们非常希望有一个从已知数据出发，不用奇异摄动的构造方法。 Uhlenbeck-Yau[215] 中的关于埃尔米特 Yang-Mills 联络的构造应该可以应用到更一般的拓扑丛中去。丛上可积复结构的构造可能会遇到来自代数链的阻碍。对他们关系的深刻理解是非常有益的。

9. 什么是一个椭圆变分问题的奇异集的结构？特别的，什么是一个面积极小簇的的奇异集的结构？是否这样一个奇异集在外围度量的摄动下是稳定的？什么是平均曲率流和 Ricci 流的解的奇异集？

对双曲系统，最重要的是广义相对论中爱因斯坦方奇点的发展问题。方程组的非线性性已经展示了物理与几何之间壮观的丰富联系。

很长时间以来，几何学家一直都对微分不等式的过定系统感兴趣。例如，流形上正曲率度量的存在性是很长一段时间的活跃中心。（还不知道，比如，当维数足够大时，是否只有局部对称空间容许正截曲率度量。现在仍不知道是否存在任何容许正截曲率度量的非平凡乘积流形。）一个自然的问题是研究，是否可以从微分方程的观点发展截曲率的稍弱形式的概念。这种想法是为了这种度量的弱收敛。了解这些度量的奇点应该也是很有趣的。当然也可以对定态的系统提出这个问题，例如 Ricci 张量。

10. 给一个完整的和严格的关于卡拉比 - 丘成桐流形的镜像对陈概念的几何解释。是否它在其他不具有特殊和乐群的几何结构中也存在？解释瞬子数的生成函数的结构和来自镜像对称的镜像映射的结构。什么是这些函数的算术含义？

Lian-Liu-Yau 的称作‘镜像对称’ I,II 和 III 的工作 (Asian J.Math.,1997,1999)，开始了由镜像对称激发的对计数几何的系统了解。 Strominger-Yau-Zaslow[195] 的工作开创了镜像对称的几何理解。 Lian-Yau[136],[137] 开始了对镜像映射算术本质的研究。